УДК 004.2:681.5

МЕТОД СОГЛАСОВАННОСТИ МАТРИЦ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ КОМПОНЕНТ ИХ МАКСИМАЛЬНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

¹Лубенцова Е.В., ¹Ожогова Е.В., ¹Лубенцов В.Ф., ¹Шахрай Е.А., ²Масютина Г.В.

¹ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет»,
Краснодар, e-mail: vf.lubentsov@yandex.ru;

²Институт сервиса, туризма и дизайна (филиал) ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет», Пятигорск, e-mail: galinka198@mail.ru

Проведен анализ оценивания отношения согласованности при обработке информации матриц парных сравнений. Учитывая независимость высказываемых экспертами суждений при индивидуальном подходе заполнения матриц, необходимым условием дальнейшей обработки информации является проверка выставленных ими оценок на непротиворечивость. В практических задачах эту проверку производят по величине отношения согласованности, которое считают показателем качества совокупности экспертных оценок. Однако в случае несогласованности мнений экспертов не существует единого правила корректировки значений элементов матрицы. Целью данной работы является разработка метода достижения согласованности матриц парных сравнений на основе корректировки их собственных значений. Положительным моментом метода является отсутствие необходимости пересмотра всех значений матрицы для улучшения ее согласованности. Сущность метода основана на анализе компонентов максимального собственного значения матрицы. Численными примерами показано, что чем больше отклонение i -й компоненты от единицы, тем больше влияние i -го элемента в комплексе всех элементов матрицы на ухудшение согласованности. Наличие такого свойства делает удобным использование отношения согласованности для проверки качества экспертных оценок. Метод не вызывает затруднений при программной реализации в составе алгоритмов решения задач выбора и сравнения альтернатив для поддержки принятия решения. Экспериментальные исследования предложенного метода подтвердили его правомочность для проверки качества экспертных оценок.

Ключевые слова: отношение согласованности, матрица парных сравнений, экспертные оценки, наибольшее собственное значение матрицы

METHOD OF MATCHING PAIRED COMPARISON MATRICES BASED ON COMPONENTS OF THEIR MAXIMUM EIGENFREQUENCY NUMBERS

¹Lubentsova E.V., ¹Ozhogova E.V., ¹Lubentsov V.F., ¹Shakhray E.A., ²Masyutina G.V.

¹Kuban State Technological University, Krasnodar, e-mail: vf.lubentsov@yandex.ru;

²Institute of Service, Tourism and Design (branch) North Caucasus Federal University,
Pyatigorsk, e-mail: galinka198@mail.ru

The analysis of consistency ratio estimation in processing the information of pair comparison matrices is carried out. Taking into account the independence of the opinions expressed by experts in the individual approach to filling out the matrices, a necessary condition for further processing of information is to check their estimates for consistency. In practical tasks, this check is performed by the value of the consistency ratio, which is considered an indicator of the quality of the set of expert evaluations. However, if the opinions of experts do not agree, there is no single rule for adjusting the values of matrix elements. The purpose of this work is to develop a method for achieving consistency of paired comparison matrices by adjusting their eigenvalues. The positive aspect of the method is that there is no need to revise all matrix values to improve its consistency. The essence of the method is based on the analysis of the components of the maximum eigenvalue of the matrix. Numerical examples show that the greater the deviation of the i -th component from the unit, the greater the influence of the i -th element in the complex of all matrix elements on the deterioration of consistency. The presence of this property makes it convenient to use the consistency ratio to check the quality of expert evaluations. The method does not cause difficulties in software implementation as part of algorithms for solving problems of selecting and comparing alternatives to support decision making. Experimental studies of the proposed method have confirmed its validity for checking the quality of expert evaluations.

Keywords: consistency ratio, matrices of paired comparisons, expert evaluations, the maximum eigenvalue of the matrix

Многие аналитические задачи выбора и сравнения альтернатив требуют использования независимых суждений (мнений), что может быть достигнуто только привлечением экспертов. Эти суждения должны быть непротиворечивы, т.е. выставленные ими оценки (баллы) должны быть проверены на согласованность и только после этого информация, полученную от экспер-

тов, можно считать приемлемой для принятия решений.

Область применения экспертных методов в анализе достаточно широка. К наиболее распространенным можно отнести следующие задачи:

– определение альтернативных вариантов решения проблемы (задачи) с оценкой их предпочтения;

– определение и ранжирование по заданному критерию наиболее существенных факторов, влияющих на выбор и сравнение альтернатив;

– выявление рисков в управлении процессами и производствами;

– определение потенциально опасных производственных объектов для построения рациональных схем противоаварийной защиты, например в нефтепереработке, нефтехимии, и другие.

Более простыми, но менее надежными методами опроса экспертов? по сравнению с коллективными, являются индивидуальные методы. Они позволяют эксперту высказывать свое мнение независимо от других. Однако при этом требуется согласование мнений всех экспертов. После сбора информации используются различные методы обработки данных. Одним из распространенных является метод парных сравнений [1]. В этом случае каждый эксперт оформляет свой результат в форме квадратной матрицы, элементы которой формируются по шкале относительной важности [2].

В практических задачах согласованность матрицы парных сравнений может не достигаться, поскольку суждения эксперта нельзя выразить точной формулой. При заполнении матрицы эксперт пользуется оценками относительной важности предпочтений по шкале интенсивности от 1 до 9 [3], которые без дополнительной корректировки могут приводить к несогласованности. Несогласованность матрицы парных сравнений может быть вызвана как личными предпочтениями эксперта, так и степенью неопределенности объекта оценки. Поэтому несогласованность матрицы является результатом взаимодействия этих факторов. Поскольку неопределенность является свойством изучаемого объекта оценки, то величину отношения согласованности (ОС) можно считать показателем качества совокупности экспертных оценок. Если для матрицы парных сравнений ОС превышает пороговое значение ($>10\%$), то это свидетельствует о существенном нарушении логичности суждений, допущенном экспертом при заполнении матрицы. В этом случае эксперту предлагается пересмотреть данные, использованные для построения матрицы, чтобы улучшить ее согласованность. Значение ниже порогового ($<10\%$) считается допустимым, т.е. отклонения элементов матрицы парных сравнений от приемлемых величин не столь велики, чтобы заметно нарушить согласованность. По результатам заполнения матрицы экспертные оценки, как правило, подлежат проверке. Для этого обычно применяются различ-

ные числовые индексы, разработанные как для групповых, так и для индивидуальных опросов, но единого правила выбора такого индекса пока нет [4]. Так, например, эксперт может изменить попарные оценки сравнения методом перебора, однако правила по изменению одной или одновременно нескольких оценок пока нет. При этом недостатком метода перебора значений всех элементов матрицы является то, что в нем не находит своего отражения варьирование наиболее значимых элементов матрицы. Поэтому вопрос о достижении наименьшего значения ОС является актуальным.

Формулировка цели и постановка задачи

Целью данной работы является разработка метода достижения согласованности матриц парных сравнений на основе корректировки их собственных значений, а также реализация его в алгоритме сравнения альтернатив, выполняемом экспертами или одним экспертом. Поставленная цель требует решения задачи по обоснованию предложенного условия и использованию его для корректировки компонентов максимального собственного значения матрицы. Использование результатов решения данной задачи позволит учитывать суждения эксперта и провести более тонкое ранжирование рассматриваемых альтернатив по степени предпочтительности [5]. В конечном итоге применение метода будет способствовать повышению эффективности принятия решений при оценке перспективности и реализуемости инновационных проектов [6, 7].

Метод достижения согласованности матриц парных сравнений на основе корректировки их собственных значений

Поскольку человеческие ощущения нельзя выразить точной формулой, то при сравнении нескольких объектов транзитивная (порядковая) и кардинальная (количественная) однородности могут быть нарушены. Для оценки однородности суждений в методе парных сравнений после заполнения матрицы определяются веса факторов и находится приоритет фактора, рассчитываются наибольшее собственное значение матрицы $\lambda_{\max}$, индекс согласованности (ИС) и отношение согласованности (ОС). Суждения экспертов считаются непротиворечивыми, если $ОС < 10\%$ [1]. Индекс согласованности определяется по формуле [3]:

$$ИС = (\lambda_{\max} - n) / (n - 1),$$

где $\lambda_{\max}$ – наибольшее собственное значение обратно симметричной матрицы; n – количество столбцов и строк матрицы.

Максимальное (наибольшее) собственное значение $\lambda_{\max}$ определяется по формуле

$$\begin{aligned}\lambda_{\max} &= \lambda_{1\max} + \lambda_{2\max} + \dots + \lambda_{n\max} = \\ &= R_1 \cdot \sum_{i=1}^n W_{i1} + R_2 \cdot \sum_{i=1}^n W_{i2} + \dots + R_j \cdot \sum_{i=1}^n W_{ij} + \dots + R_n \cdot \sum_{i=1}^n W_{in}, \\ R_i &= \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n W_{ij}} \times \left(\sum_{i=1}^n \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n W_{ij}} \right)^{-1},\end{aligned}$$

где $\lambda_{i\max}$ – компоненты максимального (наибольшего) собственного значения матрицы; i – индекс строки матрицы, $i = 1, 2, \dots, n$; j – индекс столбца матрицы, $j = 1, 2, \dots, n$; W_{ij} – экспертные оценки.

Отношение согласованности вычисляют делением ИС на величину случайного индекса (СИ) матрицы соответствующего порядка по формуле [1]:

$$\text{ОС} = \text{ИС/СИ}.$$

В нашем случае всегда $\lambda_{\max} \geq n$. Отсюда следует, что при невыполнении согласованности хотя бы одна из компонент максимального собственного числа матрицы $\lambda_{i\max}$ будет больше остальных и будет приводить к нарушению условия $(\lambda_{\max} - n) = 0$. Тогда для достижения согласованности суждений эксперта необходимо найти максимальное отклонение компоненты $\lambda_{i\max}$ от единицы, т.е. $\max / \varepsilon_i = /1 - \lambda_{i\max} /$ и использовать это отклонение для корректировки первоначальной оценки, введенной экспертом. Это может быть записано в виде условия

$$\max / \varepsilon_i = /1 - \lambda_{i\max} / \rightarrow a_{ij}.$$

Чем больше отклонение ε_i i -й компоненты от единицы, тем больше влияние i -го элемента в комплексе всех элементов матрицы на ухудшение согласованности. Наличие такого свойства делает удобным использование ОС для проверки качества экспертных оценок, особенно при программной реализации данной методики. Как показывают нижеприведенные примеры, выполнение условия $\varepsilon_i = \min (/1 - \lambda_{i\max} /)$ позволяет получить значение ОС < 10% и далее минимизировать его.

Экспериментальные исследования предложенного метода

Рассмотрим матрицу парных сравнений 5x5 с числовыми оценками для критериев А, В, С, D, Е, приведенную в табл. 1.

Используя рассчитанные оценки критериев (табл. 1), получено отношение согласованности $\text{ОС}_1 = 13,68\%$ для матрицы A_1 , которое не является приемлемым, т.е. уровень согласованности очень мал. Требуется, чтобы ОС было меньше 10%. Необходимо скорректировать приведенную матрицу суждений. Значение максимальной составляющей равно $\lambda_{3\max} = 1,6789$ (в табл. 1 выделено темным цветом), максимальное отклонение равно $\varepsilon_i = 0,6789$, что указывает на необходимость корректировки третьего элемента первой строки матрицы в табл. 1, т.е. $a_{13} = 5$. Уменьшим значение a_{13} на единицу. Матрица с скорректированным значением a_{13} приведена в табл. 2.

Результаты, полученные аналогичными вычислениями, показывают, что коррекция элемента a_{13} позволила уменьшить ОС в 1,34 раза. Проводя дальнейшие вычисления, получены следующие результаты, характеризующие уменьшение ОС:

$$\begin{aligned}\text{при } a_{13} = 3, \lambda_{i\max} &= \{0,9591163; 0,9617182; 1,365; 1,069; 0,946\}, \\ \max / \varepsilon_i &= \max \{0,0222681; 0,044684; 0,52344; 0,06166; 0,06007\} = 0,52344, \\ \text{ОС}_2 &= 6,71\%; \\ \text{при } a_{13} = 2, \lambda_{i\max} &= \{0,9451337; 0,9674979; 1,205521; 1,075; 0,952\}, \\ \max / \varepsilon_i &= \max \{0,0548663; 0,032502; 0,205521; 0,075199; 0,048085\} = 0,205521, \\ \text{ОС}_3 &= 3,24\%; \\ \text{при } a_{13} = 1, \lambda_{i\max} &= \{0,9683669; 0,9683669; 1,06025; 1,076164; 0,953\}, \\ \max / \varepsilon_i &= \max \{0,031633; 0,031633; 0,060205; 0,076164; 0,04723\} = 0,076164, \\ \text{ОС}_4 &= 0,58\%.\end{aligned}$$

Таблица 1

Числовые оценки матрицы парных сравнений A_1 для критериев

Критерии	A	B	C	D	E	Оценки компонент собственного вектора матрицы	Нормализованные оценки вектора
A	1	1	5	5	7	2,8093	0,3917
B	1	1	1	5	7	2,0362	0,2839
C	1/5	1	1	7	9	1,6599	0,2314
D	1/5	1/5	1/7	1	2	0,4089	0,0570
E	1/7	1/7	1/9	1/2	1	0,2576	0,0359
Сумма	2,5428571	3 1/3	7 1/4	18 1/2	26	7,1719	0,9999
$\lambda_{i \max}$	0,9960	0,9491	1,6789	1,055	0,934		
/ε/	0,0039	0,0509	0,6789	0,0547	0,0662		
$\lambda_{\max} = 5,6125$; ИС = 0,1531364; max/ε/ = 0,6789 ; ОС = 13,68 % .							

Таблица 2

Числовые оценки матрицы парных сравнений A_2 с корректированным значением
третьего элемента в первой строке

Критерии	A	B	C	D	E	Оценки компонент собственного вектора матрицы	Нормализованные оценки вектора
A	1	1	4	5	7	2,6867	0,3771
B	1	1	1	5	7	2,0362	0,2858
C	1/4	1	1	7	9	1,7356	0,2436
D	1/5	1/5	1/7	1	2	0,4089	0,0574
E	1/7	1/7	1/9	1/2	1	0,2576	0,0362
Сумма	2,5928	3,3333	6,25	18,52	26	7,1250	1,0001
$\lambda_{i \max}$	0,9777	0,9553	1,523	1,062	0,94		
/ε/	0,0223	0,0447	0,5235	0,0617	0,0602		
$\lambda_{\max} = 5,4581$; ИС = 0,1145; max/ε/ = 0,5235 ; ОС = 10,23 % .							

Следует заметить, что, несмотря на улучшение $\lambda_{\max}$ в 23,5 раза, корректировка осуществлялась только на один из элементов матрицы a_{13} , что, в общем случае, могло нарушить исходную ранжировку качественных предпочтений эксперта в сторону, отличную от реальной ситуации. Для устранения такого недостатка, т.е. для исключения нарушения логичности суждений эксперта, проведем анализ согласованности матрицы парных сравнений на основе перебора различных компонент ее максимального собственного числа. Пусть матрица 5×5 определена выражением, представленным в табл. 3. Отношение согласованности $ОС_1 = 15,32\% > 10\%$, что является неприемлемым и свидетельствует о существенном нарушении логичности суждений, допущенном экспертом при заполнении матрицы, т.е. уровень их согласованности очень мал. Вторая компонента максимального собственного числа равна $\lambda_{2\max} = 1,6324$ и указывает на необходимость

корректировки второго элемента в первой строке матрицы a_{12} (табл. 3). Последовательное изменение a_{ij} приводит к улучшению ОС, что подтверждено полученными следующими данными:

при $\max / \epsilon / = 0,398$, $a_{15} = 5$, ОС = 10,93 %;
при $\max / \epsilon / = 0,396$, $a_{12} = 3$, ОС = 11,0 %;
при $\max / \epsilon / = 0,405$, $a_{15} = 4$, ОС = 6,82 %;
при $\max / \epsilon / = 0,369$, $a_{15} = 3$, ОС = 7,2 %.

Анализ согласованности матриц парных сравнений показал, что дальнейшее изменение значений ее элементов приводит к незначительному изменению ОС, всего лишь в $6,98/6,82 = 1,02$ раза, и позволяет остановиться на матрице табл. 4.

Судя по нормализованным оценкам векторов, данный вариант матрицы не нарушает логичности первоначальных суждений эксперта для критериев C, D, E и ранжирования качественных предпочтений. Причем в данном варианте матрицы по сравнению с матрицей, имеющей ОС = 6,98 %, исключается компромисс между суждениями, так

как лингвистическая оценка предпочтений согласно девятибалльной шкале записана нечетными числами, а не промежуточными (четными). Рисунок иллюстрирует результа-

ты минимизации ОС при последовательной корректировке значений оценок для двух элементов матрицы сравнений пяти критериев при использовании шкалы от 1 до 9.

Таблица 3

Числовые оценки матрицы парных сравнений A_3 для критериев

Критерии	A	B	C	D	E	Оценки компонент собственного вектора матрицы	Нормализованные оценки вектора
A	1	4	7	5	5	3,7069	0,4841
B	1/3	1	7	5	5	2,2552	0,2945
C	1/7	1/7	1	1/3	1/5	0,2671	0,0349
D	1/5	1/5	3	1	1/3	0,5253	0,0686
E	1/5	1/5	5	3	1	0,9029	0,1179
Сумма	1,8762	5 1/2	23	14 1/3	11 1/2	7,6575	0,9990
$\lambda_{i \max}$	0,9083	1,6324	0,802	0,983	1,36		
/ ϵ /	0,0175	0,6324	0,1976	0,0167	0,3598		
$\lambda_{\max} = 5,6862$; ИС = 0,1715; $\max/\epsilon = 0,6324$; ОС = 15,32 %.							

Таблица 4

Числовые оценки матрицы парных сравнений A_4 для критериев

Критерии	A	B	C	D	E	Оценки компонент собственного вектора матрицы	Нормализованные оценки вектора
A	1	2	7	5	5	3,2271	0,4496
B	1/3	1	7	5	5	2,2552	0,3142
C	1/7	1/7	1	1/3	1/5	0,2671	0,0372
D	1/5	1/5	3	1	1/3	0,5253	0,0732
E	1/5	1/5	5	3	1	0,9029	0,1258
Сумма	1,8762	3 1/2	23	14 1/3	11 1/2	7,1776	1,0000
$\lambda_{i \max}$	0,8435	1,1131	0,8560	1,0490	1,4508		
/ ϵ /	0,1565	0,1131	0,1439	0,0490	0,45079		
$\lambda_{\max} = 5,3125$; ИС = 0,0781; $\max/\epsilon = 0,45079$; ОС = 6,98 %.

График минимизации ОС (ряд 1) с использованием значений $a_{15} = (5, 5, 4, 4, 3, 5, 6)$, (ряд 2) и $a_{12} = (4, 3, 3, 2, 2, 2, 2)$ (ряд 3) в интервале экспертных оценок $a_{ij} = [1-7]$: по оси абсцисс – значения ОС

Установлено, что при отклонении суждений эксперта от однородности одна из компонент собственных значений матрицы будет больше единицы. Таким образом, для достижения необходимой согласованности суждений эксперта необходимо использовать отклонение $(1 - \lambda_{i \max})$. Результаты исследования показали, что коррекция элемента матрицы, соответствующего максимальному значению компонента максимального собственного значения матрицы, позволяет уменьшить ОС. Если использовать воздействие на различные компоненты максимального собственного числа матрицы, то можно достигнуть не только приемлемого значения ОС, но и осуществить минимизацию ОС, поскольку дальнейшее изменение значений ее элементов не приводит к значительному изменению ОС.

Заключение

В данной статье предложен метод достижения приемлемой согласованности при решении задачи сравнения нескольких вариантов на основе экспертных оценок. Суть метода состоит в том, что в диалоге с компьютером лицо, принимающее решение, либо компьютерная программа, на основе анализа компонент максимального собственного числа матрицы изменяет оценки значимости критериев таким образом, чтобы получить наименьшее значение отношения согласованности. Корректировка оценки осуществляется по следующе-

му принципу: вычисляется отклонение i -й компоненты от единицы и чем больше модуль отклонения, тем меньший приоритет выставляется элементу a_{ij} в матрице. С помощью предложенного метода осуществлен сравнительный анализ пяти вариантов. Показано, что использование данной методики позволяет целенаправленно проводить корректировку экспертных оценок, обеспечивая более грамотную ранжировку качественных предпочтений лица, принимающего решение.

Список литературы

1. Саати Т.Л. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: аналитические сети. М.: ЛИБРОКОМ, 2009. 360 с.
2. Саати Т.Л. Принятие решений. Метод анализа иерархий. М.: Радио и связь, 1993. 320 с.
3. Тихомирова А.Н., Сидоренко Е.В. Модификация метода анализа иерархий Т. Саати для расчета весов критериев при оценке инновационных проектов // Современные проблемы науки и образования. 2012. № 2. [Электронный ресурс]. URL: <http://science-education.ru/ru/article/view?id=6009> (дата обращения: 24.05.2020).
4. Анализ согласованности матриц парных сравнений на основе их собственных чисел [Электронный ресурс]. URL: https://studme.org/279799/informatika/analiz_soglasovannosti_matrits_parnyh_sravneniy_osnove_sobstvennyh_chisel (дата обращения 24.05.2020).
5. Системы поддержки принятия решения / Под ред. В.Г. Халина, Г.В. Черновой. М.: Изд-во Юрайт, 2017. 494 с.
6. Бугаев Ю.В., Медведкова И.Е., Бабаян М.К. Методы проверки транзитивности индивидуальных экспертных предпочтений // Вестник ФГУНТ. 2014. № 2. С. 77–82.
7. Огурцов А.Н., Староверова Н.А. Алгоритм повышения согласованности экспертных оценок в методе анализа иерархий // Вестник «ИГЭУ». 2013. Вып. 5. С. 81–84.