УДК 624.073.1

ИЗГИБ СОСТАВНОЙ ПЛАСТИНЫ ИЗ РАЗНОМОДУЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ. КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ

Кривчун Н.А., Уманская О.Л.

Тюменский индустриальный университет, Тюмень, e-mail: Natalya.krivchun@mail.ru

В настоящее время в строительстве, машиностроении, авиастроении используют композитные материалы. Многие из них обладают свойством разномодульности, т.е. имеют различные модули упругости на растяжение-сжатие. К материалам, обладающим такими свойствами, относятся конструкционные стали, специальные чугуны, графиты, оргстекло, бетон и т.д. Помимо этого, при строительстве используются составные многослойные пластины, в которых материалы слоев тоже могут обладать свойством разномодульности. При рассмотрении составных пластин необходимо учитывать не только свойства материала слоев, но и влияние связей между слоями. Необходимо совершенствовать методы расчета составных конструкций, выполненных из таких материалов. Математическая модель включает в себя уравнения, описывающие работу швов, соединяющих слои; уравнение равновесия для всей составной пластины в целом; уравнения неразрывности срединной поверхности для каждого слоя. Авторы рассматривают изгиб трехслойной пластины, у которой материал среднего слоя обладает разномодульностью, а слои соединяются анкерами или клеем. Такое соединение слоев обеспечивает конечную жесткость на сдвиг. Предлагается решение задачи изгиба трехслойной пластины с учетом связей между слоями и разносопротивляющихся свойств слоев.

Ключевые слова: составная пластина, разномодульные материалы, интегральные характеристики жесткости, напряжения, деформации

BENDING A COMPOSITE PLATE MADE OF MULTI-MODULUS MATERIALS. BOUNDARY CONDITION

Krivchun N.A., Umanskaya O.L.

Tyumen Industrial University, Tyumen, e-mail: natalia.krivchun@mail.ru

Currently, composite materials are used in construction, engineering, and aircraft construction. Many of them have the property of multi-modularity, i.e. they have different elastic modulus for tension-compression. Materials with these properties include structural steels, special cast iron, graphite, plexiglass, concrete, etc. In addition, composite multi-layer plates are used in construction, in which the materials of the layers can also have the property of multi-modularity. When considering composite plates, it is necessary to take into account not only the material properties of the layers, but also the influence of connections between the layers. It is necessary to improve methods for calculating composite structures made of such materials. The mathematical model includes equations describing the operation of the seams connecting the layers; the equation of equilibrium for the entire composite plate as a whole; the equations of continuity of the middle surface for each layer. The authors consider the bending of a three-layer plate, in which the material of the middle layer has a different modularity, and the layers are connected by anchors or glue. This combination of layers provides the final shear stiffness. A solution to the problem of bending a three-layer plate is proposed, taking into account the properties of the connections between the layers and the multi-module properties of the layers.

Keywords: a multi-layer plate, multimodulus materials, integral characteristics of rigidity, strain (stress), deformation

В современном строительстве широко и многофункционально используются многослойные пластины. Слои пластин выполняют как из новых, так и традиционных материалов, в том числе композитных. Эти материалы в основном характеризуются свойством разномодульности, то есть имеют различные модули упругости при растяжении и сжатии [1]. Решая задачи изгиба составных конструкций, необходимо учитывать особенности их деформирования в реальных условиях за счёт взаимного проскальзывания слоёв. Перераспределение усилий между слоями обеспечивается переменной жёсткостью швов. При расчёте напряжённо-деформированного состояния необходимо учитывать влияние жёсткости межслойных связей. Построение математической модели подробно изложено в [2].

Цель исследования: математическая модель изгиба многослойных составных пластин из разномодульных материалов включает систему дифференциальных уравнений и граничные условия. В результате интегрирования уравнений равновесия, неразрывности и работы шва, искомые функции W , φ^i , T должны удовлетворять крайевым условиям, которые соответствуют конкретному закреплению контура.

Материалы и методы исследования

Построение математической модели и последующие исследования выполнялись методами математического моделирования.

Результаты исследования и их обсуждение

Рассматривается изгиб составных пластин, у которых материал среднего слоя

имеет различные модули Юнга на растяжение и сжатие, определяющим является знак главного напряжения [3], разномодульность связана с положением главных площадок [4]. Рассмотрим составную трехслойную симметричную пластину. Размеры пластины 1200×1200 мм. Толщины крайних стальных листов $h^{(1)} = h^{(3)} = 1$ мм, общая толщина 120 мм. Модули упругости $E^{(1)} = E^{(3)} = 2,1 \cdot 10^5$ МПа; $E^{(2)} = 8 \cdot 10^3$ МПа, коэффициенты Пуассона $\nu^{(1)} = \nu^{(3)} = 0,3$; $\nu^{(2)} = 0,2$. Нагрузка интенсивностью $q = 1$ МПа прикладывалась в центре пластины на площадке 200×200 мм по нормали.

Слои в составной пластине соединены связями, которые предполагают сдвиг одного слоя по отношению к другому вдоль оси пластин. Поперечные связи абсолютно жесткие. Такое соединение слоев обеспечивает одинаковый прогиб.

Интегральные характеристики жесткости для i -го слоя составной пластины запишем с учетом разномодульных свойств материала [1], в декартовых координатах. Переход от направлений главных площадок к координатам X, Y осуществляем через преобразование матрицы податливостей, в отличие от [5].

Математическую модель изгиба составной конструкции из разномодульных материалов запишем в виде системы дифференциальных уравнений [1]. Стремясь к смешанной форме уравнений, введем в рассмотрение функцию усилий $\phi(x, y)$, действующих в срединной поверхности i -го слоя. Запишем усилия, действующие в i -м слое:

$$\begin{aligned} N_x^i &= \frac{\partial^2 \phi^i}{\partial y^2} - \int_0^x \tau_x^i dx + \int_0^x \tau_x^{i-1} dx; \\ N_y^i &= \frac{\partial^2 \phi^i}{\partial x^2} - \int_0^y \tau_y^i dy + \int_0^y \tau_y^{i-1} dy; \\ S^i &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (1)$$

Обозначим $\int_0^x \tau_x^i dx = T_x^i$, $\int_0^y \tau_y^i dy = T_y^i$, где T_x^i , T_y^i – усилия от сдвигающих напряжений в межслойных связях i -го шва.

Уравнение равновесия получим из рассмотрения элемента i -го слоя пластины в смешанном виде [1]:

$$L_1(D^*, w) = q - L_2(D^*, w) + \Lambda(\phi, T_x^i, T_y^i) + L(c, T_x^i, T_y^i). \quad (2)$$

Уравнение неразрывности для срединной поверхности i -го слоя в операторной форме [1]:

$$L_1(B^*, \phi) + L_2(B^*, \phi) - L_1(B^*, T_x^i, T_y^i) - L_2(B^*, T_x^i, T_y^i) - \Lambda^i(c, w) = 0. \quad (3)$$

Чтобы замкнуть систему, запишем уравнения, отражающие работу i -го шва. В этих уравнениях учитывается совместная работа слоев, прилегающих к i -му шву.

В каждом шве выделим осевую линию, по обе стороны которой происходят продольные смещения слоев. Разности этих смещений запишутся как

$$\Delta u^i = u^{i+1} - u^i + \frac{\partial w}{\partial x} c^i; \quad \Delta v^i = v^{i+1} - v^i + \frac{\partial w}{\partial y} c^i, \quad (4)$$

где $u^i(x, y)$, $v^i(x, y)$, $w^i(x, y)$ – продольные и поперечные смещения точек срединной поверхности i -го слоя; $c^i(x, y)$ – расстояние между срединными поверхностями смежных слоев, при переменной толщине слоев.

Связь между Δu^i , Δv^i и сдвигающими напряжениями в i -м шве представим в виде [2]:

Напряжения сдвига записываются через функции T_x^i и T_y^i , учитывающие работу i -го шва:

$$\tau_x^i = \frac{\partial T_x^i}{\partial x}; \quad \tau_y^i = \frac{\partial T_y^i}{\partial y}. \quad (5)$$

Выразим из (5) Δu^i и Δv^i , подставим их в (4). Проинтегрируем первое уравнение (4) по x , второе по y . Запишем полученные уравнения [1]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta_x^i} \frac{\partial^2 T_x^i}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\eta_x^i} \right) \frac{\partial T_x^i}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(c^i \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial u^{i+1}}{\partial x} - \frac{\partial u^i}{\partial x}; \\ \frac{1}{\eta_y^i} \frac{\partial^2 T_y^i}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\eta_y^i} \right) \frac{\partial T_y^i}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(c^i \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial v^{i+1}}{\partial y} - \frac{\partial v^i}{\partial y}. \end{aligned} \quad (6)$$

Математическая модель изгиба многослойных составных пластин из разнородных материалов состоит из системы дифференциальных уравнений и граничных условий.

В результате интегрирования (2), (3) и (6) искомые функции W , φ^i и T^i должны удовлетворять краевым условиям, которые соответствуют конкретному закреплению контура.

В общем случае можно выделить две группы граничных условий: на контуре опирания (для всего пакета) и на торцах пакета (для каждого i -го слоя и шва). При этом условия на контуре формулируются независимо от условий на торцах слоев и швов.

Варианты опирания на контуре:

1. Шарнир.
2. Жесткая заделка.
3. Свободный край.

Условия на торцах слоев:

А – торцы слоев скреплены гибкой лентой;

В – торцы скреплены абсолютно жесткой лентой;

С – свободные торцы.

Полагая, что на всех четырех кромках составной пластины условия одинаковы, приступим к рассмотрению случаев опирания по кромкам $x = 0$ и $x = a$:

1 – А. Пластина опирается на шарнир, подвижный по нормали к контуру и неподвижный вдоль контура, а торцы слоев скреплены гибкой лентой. Граничные условия имеют вид

$$W = 0; V^i = 0; M_x = 0;$$

$$N_x^i = 0; T_x^i = 0; T_y^i = 0. \quad (7)$$

Из первого условия следует

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \text{ Из (1), если } N_x^i = T_x^i = T_y^i = 0,$$

$$\text{то } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0. \text{ Из (7) искомые функ-}$$

ции, должны удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} V^i = \int_0^y \varepsilon_y dy = \int_0^y \left(B_{22}^{*i} \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x^2} - B_{21}^{*i} \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial y^2} - B_{22}^{*i} (T_y^i - T_y^{i-1}) + B_{21}^{*i} (T_x^i - T_x^{i-1}) - B_{26}^{*i} \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x \partial y} - \right. \\ \left. - \left(\bar{C}_{21}^i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{C}_{22}^i \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\bar{C}_{26}^i \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right) dy = 0; \\ M_x = \sum_{i=1}^{n+1} \left(-D_{11}^{*i} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12}^{*i} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2D_{16}^{*i} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left(C_{11}^{*i} \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial y^2} + C_{12}^{*i} \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x^2} - C_{11}^{*i} (T_x^i - T_x^{i-1}) - \right. \right. \\ \left. \left. - C_{12}^{*i} (T_y^i - T_y^{i-1}) + C_{16}^{*i} \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x \partial y} \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

1 – В. При шарнирном опирании пластины торцы скреплены абсолютно жесткой лентой. Граничные условия имеют вид

$$W = 0; U^i = 0; V^i = 0; \int_0^b M_x dy = 0; \frac{\partial T^i}{\partial x} = 0. \quad (9)$$

Так как W принимает на кромке нулевое значение, то и производная $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$ вдоль этой кромки.

Распишем условия (9):

$$\begin{aligned} U^i = \int_0^x \varepsilon_x dx = \int_0^x \left(B_{11}^{*i} \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial y^2} - B_{12}^{*i} \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x^2} - B_{11}^{*i} (T_x^i - T_x^{i-1}) + B_{12}^{*i} (T_y^i - T_y^{i-1}) - B_{16}^{*i} \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x \partial y} - \right. \\ \left. - \left(\bar{C}_{11}^i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{C}_{12}^i \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\bar{C}_{16}^i \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right) dx = 0; \end{aligned} \quad (10)$$

$$V^i = \int_0^y \varepsilon_y^i dy = \int_0^y \left(B_{22}^{*i} \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x^2} - B_{21}^{*i} \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial y^2} - B_{22}^{*i} (T_y^i - T_y^{i-1}) + B_{21}^{*i} (T_x^i - T_x^{i-1}) - B_{26}^{*i} \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x \partial y} - \right. \\ \left. - \left(\bar{C}_{21}^i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{C}_{22}^i \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\bar{C}_{26}^i \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right) dy = 0;$$

$$\int_0^b M_x dy = \int_0^b \left(-D_{11}^{*i} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12}^{*i} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2D_{16}^{*i} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left(C_{11}^{*i} \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial y^2} + C_{12}^{*i} \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x^2} - C_{11}^{*i} (T_x^i - T_x^{i-1}) - \right. \right. \\ \left. \left. - C_{12}^{*i} (T_y^i - T_y^{i-1}) + C_{16}^{*i} \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x \partial y} \right) \right) dy = 0.$$

Далее система (9) расписывается относительно $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial y^2}$.

1 – С. Составная пластина со свободными торцами слоев опирается на шарнир. Краевые условия для этого случая:

$$W = 0; M_x = 0; N_x^i = 0; S^i = 0; T^i = 0. \quad (11)$$

Равенство нулю прогиба на кромке приводит к условию $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$.

$$M_x = \sum_{i=1}^{n+1} \left(-D_{11}^{*i} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12}^{*i} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2D_{16}^{*i} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left(C_{11}^{*i} \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial y^2} + C_{12}^{*i} \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x^2} - C_{11}^{*i} (T_x^i - T_x^{i-1}) - \right. \right. \\ \left. \left. - C_{12}^{*i} (T_y^i - T_y^{i-1}) + C_{16}^{*i} \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x \partial y} \right) \right) = 0;$$

$$N_x^i = \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial y^2} - T_x^i + T_x^{i-1} = 0; \quad (12)$$

$$S^i = -\frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x \partial y} = 0.$$

Окончательно получим $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$;

$$T^i = 0; \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x \partial y} = 0. \quad (13)$$

Заключение

Представленные дифференциальные уравнения позволяют решать, в отличие от существующих моделей, задачи изгиба многослойных пластин из разносопротивляющихся материалов с учетом влияния жест-

кости межслойных связей на напряженно-деформированное состояние конструкции. Свойство разномодульности материала учтено при записи интегральных характеристик жесткости. Тот факт, что дифференциальные уравнения имеют высокий порядок, позволяет учитывать сложные и разноо-

бразные кинематические и статические условия закрепления слоев оболочки. Граничные условия для функции, которая отражает условия, связанные с внешней статической неопределимостью, должны записываться для каждого слоя, для функции, отвечающей за внутреннюю статическую неопределимость конструкции, для каждого шва.

Список литературы

1. Кривчун Н.А., Уманская О.Л. Интегральные характеристики жесткости составных пластин из разносопротивляющихся материалов // Фундаментальные исследования. 2016. № 3–3. С. 505–508.
2. Якубовский Ю.Е., Гуляев Б.А., Колосов В.И., Кривчун Н.А., Якубовская С.В. Изгиб составных пластин и полых оболочек. Тюмень, 2016. 185 с.
3. Амбарцумян С.А. Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982. 320 с.
4. Пахомов Б.М. Вариант модели изотропного разномодульного материала // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2017. № 6. С. 35–48. DOI: 10.18698/0236-3941-2017-6-35-48.
5. Якубовский Ю.Е., Гуляев Б.А., Донкова И.А., Кузев А.Г. Моделирование и расчет составных пластин, полых и цилиндрических оболочек. Тюмень: ТИУ, 2018. 170 с.