УДК 519.6:62-423.2

**АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА КРУЧЕНИЯ СТЕРЖНЕЙ
ПРОКАТНОГО ПРОФИЛЯ В ПАКЕТЕ ПРИКЛАДНЫХ
ПРОГРАММ FREEFEM++****Рябokonь А.С., Ткаченко О.П.***Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской академии наук, Хабаровск,
e-mail: anyuta.riabokon@yandex.ru, olegt1964@gmail.com*

В металлоконструкциях применяются стержневые элементы, выполненные из угловой прокатной стали (синоним «угловой профиль»). При кручении стержня с угловым профилем во входящем углу возникает сильная концентрация напряжений, теоретически напряжение стремится к бесконечности. Численное решение таких задач вызывает серьезные трудности, и не все пакеты прикладных программ позволяют получить правильные результаты. Перед инженером возникает проблема выбора пакета прикладных программ и его дальнейшего использования. В данной статье исследуется возможность применения пакета прикладных программ FreeFEM++ к численному решению краевой задачи о кручении стержня углового профиля методом конечных элементов. Основным методом исследования является сравнение численного решения задачи во FreeFEM++ с известным из литературы точным или приближенным решением. Решены задачи о сравнении результатов расчетов кручения стержня с тремя профилями: круглого сечения; углового сечения с толстыми стенками; тонкостенного углового сечения. Изучались величины: крутильная жесткость, угол закручивания, касательные напряжения. Сделан вывод о том, что пакет прикладных программ FreeFEM++ дает удовлетворительную точность при решении поставленных задач. Численные значения исследуемых величин, полученные в результате расчетов, находятся в пределах значений, известных из литературных источников. Создан алгоритм нахождения и визуализации численного решения задачи.

Ключевые слова: кручение стержней, тонкостенные стержни, касательные напряжения, концентраторы напряжений, метод конечных элементов, пакеты прикладных программ для ЭВМ

**ALGORITHM FOR THE NUMERICAL ANALYSIS OF THE TORSION OF THE RODS
OF ROLLED PROFILES IN THE APPLICATION PACKAGE FREEFEM++****Ryabokon A.S., Tkachenko O.P.***Computing Center of Far-Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Khabarovsk,
e-mail: anyuta.riabokon@yandex.ru, olegt1964@gmail.com*

In metal structures, rod elements made of angular rolled steel are used (synonymous with «angular profile»). When torsion of a rod with an angular profile in the incoming corner, a strong concentration of stress occurs, theoretically the stress tends to infinity. The numerical solution of such problems causes serious difficulties, and not all application packages allow you to get the correct results. The engineer faces the problem of choosing an application package, and its further use. This article explores the possibility of applying the FreeFEM++ application package to the numerical solution of the boundary value problem of torsion of an angular profile rod using the finite element method. The main research method is to compare the numerical solution of the problem in FreeFEM++ with the exact or approximate solution known from the literature. The problems of comparing the results of calculations of the torsion of a rod with three profiles are solved: round section; angular section with thick walls; thin-walled angular section. The values were studied: torsional stiffness, twist angle, tangential stresses. It is concluded that the FreeFEM++ application package provides satisfactory accuracy in solving assigned problems. The numerical values of the studied quantities obtained as a result of calculations are within the range of values known from literary sources. An algorithm for finding and visualizing a numerical solution to the problem is created.

Keywords: torsion of rods, thin walled rods, tangential stresses, stress concentrators, finite element method, computer application packages

Обширный класс современных строительных конструкций имеет своей основой тонкостенные стержневые профили, соединенные между собой. В этих профилях возникает сложное напряженное состояние, частью которого является кручение. Задача о кручении стержня углового прокатного профиля является частным случаем задачи Ламе, в которой в вершине входящего угла теоретические значения напряжений стремятся к бесконечности [1]. Решение задач с такими сингулярностями является сложной математической проблемой. Результаты исследований напряжений, возникающих

при деформировании прокатных профилей, являются темой большого числа научных публикаций.

Обзор литературы по исследованию стыковых соединений тонкостенных стержней и оболочек выполнен в [2]. Рассмотрены различные теоретические, численные и экспериментальные подходы к моделированию, анализу и проектированию тонкостенных структур, соединенных вдоль их общих границ. Рассмотрено несколько альтернативных форм граничных условий, условий непрерывности и скачков на сингулярных срединных кривых, моделирующих соединение.

В [3] выполнено конечно-элементное и экспериментальное моделирование нового типа многоплоскостного соединения для изменения уклона в длинно-пролетной передающей башне линии высоковольтной электропередачи. Помимо изгибающих моментов, в элементах системы наблюдались крутящие моменты и соответствующие напряжения.

В [4] решалась теоретическая задача Дирихле для уравнения Пуассона для стержня квадратного поперечного сечения с применением серендиповых конечных элементов. Доказано, что в задаче расчета кручения стержня квадратного сечения методом конечных элементов (МКЭ) новые альтернативные модели биквадратичного конечного элемента позволяют получить большую точность в сравнении с известным стандартным элементом.

Вопрос о введении нового конечного элемента для расчета кручения стержня открытого профиля рассмотрен в [5]. Выполнено сравнение аналитического и численного решений для стержня двутаврового сечения без учета и с учетом деформаций сдвига с использованием двух видов аппроксимации для функций формы.

Таким образом, тема исследования напряженного состояния тонкостенных угловых профилей является актуальной, содержащей множество неизученных теоретически и практически важных вопросов. В связи с этим есть проблема выбора адекватного инструмента численного анализа возникающих краевых задач. Коммерческие программы часто недоступны по цене для исследователя, в то время как свободно распространяемые продукты могут быть сопоставимы с ними по качеству результатов.

Одним из таких пакетов является FreeFEM++ [6]. Он применялся в [7] к исследованию задачи об установившейся вибрации предварительно напряженной пластины на основе модели Кирхгофа. Дана оценка точности решения прямой задачи для узкой однородной пластины методом конечных элементов путем сравнения с аналитическим решением. Анализ продемонстрировал высокую точность решения МКЭ, и сделан вывод о том, что пакет FreeFEM++ предоставил адекватные численные результаты для рассмотренной пластины.

Целью данной статьи является исследование возможности применения пакета FreeFEM++ к анализу напряженно-деформированного состояния при кручении стержня углового профиля, и разработка алгоритма этого анализа. Основным методом исследования является сравнение численного решения задачи МКЭ с известным из литературы решением.

Поставлены задачи:

1. Создания алгоритма нахождения и визуализации решения МКЭ в пакете FreeFEM++.

2. Сравнения результатов расчетов кручения стержня:

- а) круглого сечения;
- б) углового сечения с толстыми стенками;
- в) тонкостенного углового сечения.

Рассматривается упругий стержень с поперечным сечением, представленным на рис. 1. Ставится задача о свободном кручении этого стержня двумя равными по модулю и противоположными по направлению крутящими моментами, приложенными к его концам. Краевая задача будет решаться в области Ω с границей L_0 , рис. 1.

Рис. 1. Геометрия поперечного сечения

Известно [8], что выбором вида решения задача о кручении стержня сводится к краевой задаче для уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2, \quad (1)$$

где $U(x, y)$ – функция напряжений Прандтля. Для односвязных стержней:

$$U = 0 \text{ на границе области } L_0. \quad (2)$$

Касательные напряжения находим как

$$\tau_{xz} = G\theta \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -G\theta \frac{\partial U}{\partial x},$$

где G – сдвиговой модуль Юнга.

Угол закручивания на единицу длины стержня θ определяем из выражения для крутящего момента [8]:

$$M = C\theta,$$

где C – крутильная жесткость стержня, для сплошных стержней определяется как [9]

$$C = 2G \iint_{\Omega} U(x, y) d\Omega.$$

Итак, будем решать краевую задачу Дирихле для уравнения Пуассона (1), (2).

Материалы и методы исследования

С помощью пакета FreeFEM++, который позволяет строить численное решение двумерных краевых задач методом конечных элементов, решены задачи о кручении стержня круглого и углового поперечного сечения.

Алгоритм решения задачи во FreeFEM++:

1. Запишем задачу (1), (2) в вариационной постановке

$$\forall v, \int_{\Omega} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} - f v \right) dx dy = 0, \\ v|_{L_0} = 0, \quad (3)$$

где $f = 2$.

2. Зададим на языке FreeFEM++ поперечное сечение стержня – область в параметрическом виде, в которой решается задача.

3. Произведем триангуляцию области при помощи встроенного генератора сеток, основанного на алгоритме Делоне – Вороного.

4. Приближенное решение задачи (3) ищем в виде

$$U^h(x, y) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k \varphi_k(x, y), \quad (4)$$

где $\varphi_k(x, y)$ – базисные функции, в качестве которых выбраны кусочно-линейные непрерывные конечные элементы (барицентрические координаты), c_k – коэффициенты, подлежащие определению. Таким образом, формула (4) задает аппроксимацию функции $U(x, y)$ в виде некоторого сужения на конечномерное пространство, определяемое базисом $\varphi_k(x, y)$, $k = 1..n - 1$.

5. Запишем на языке FreeFEM++ вариационную формулировку задачи с краевы-

ми условиями и зададим способ решения СЛАУ (по умолчанию несимметричный мультифронтальный метод решения разреженных систем линейных уравнений).

6. Определим крутильную жесткость стержня C и угол закручивания на единицу длины θ средствами языка FreeFEM++.

7. Найдем касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} и выполним их визуализацию. Средства пакета FreeFEM++ позволяют сохранять построенные изображения в postscript файл при помощи команды plot с параметром ps.

Численный эксперимент проведен со следующими параметрами: $G = 80$ ГПа, $M = 10$ кН·м, для задачи А) о кручении стержня круглого поперечного сечения $R = 40$ мм; для задачи Б) о кручении стержня углового профиля $b = 80$ мм, $d = 38$ мм; для задачи В) о кручении стержня углового профиля $b = 80$ мм, $d = 8$ мм.

Результаты исследования и их обсуждение

Задача А. В результате вычислений по представленной выше методике сформированы изображения распределений значений касательных напряжений в круговом стержне, представленные на рис. 2.

Максимальные и минимальные значения касательных напряжений приведены в табл. 1.

Таблица 1

Предельные значения касательных напряжений в стержне круглого сечения

Напряжения	Max	Min
τ_{xz}	110 МПа	-110 МПа
τ_{yz}	110 МПа	-110 МПа

Найдены значения крутильной жесткости стержня $C = 321\,699$ Н·м² и угла закручивания на единицу длины $\theta = 0,031$.

Рис. 2. Касательные напряжения в стержне круглого профиля: а) τ_{xz} , Па; б) τ_{yz} , Па

Сравнение полученных результатов проведено с источником [9, с. 92], где крутильную жесткость можно определить по формуле

$$C = G\pi R^4/2,$$

из которой получено значение 321 699 Н·м², что согласуется с численным результатом.

Для задач Б и В результат распределения значений касательных напряжений в стержне углового профиля, представлен на рис. 3 и 4.

Максимальные и минимальные значения касательных напряжений для обеих задач сведены в табл. 2.

Жесткость при кручении прокатных профилей приближенно можно вычислить по формуле [8, с. 266]:

$$C = G\alpha \sum \frac{ah^3}{3}, \quad (5)$$

где a и h – высота и толщина отдельных прямоугольников. Коэффициент α учи-

тывает влияние соединения отдельных прямоугольников для $a/h > 2$. Экспериментальные значения коэффициента α [8, с. 266] и рассчитанные для него крутильная жесткость и угол закручивания, а также результаты расчета во FreeFEM++ приведены в табл. 3.

Из табл. 3 видно, что значения крутильной жесткости и угла закручивания, полученные при помощи пакета FreeFEM++, находятся в допустимом диапазоне значений.

Заключение

Создан алгоритм численного анализа и визуализации его результатов для решения задачи о свободном кручении стержня углового прокатного профиля методом конечных элементов в пакете прикладных программ FreeFEM++. Полученные численные результаты хорошо согласуются с известными решениями задач о кручении стержней круглого, углового и тонкостенного углового профилей.

Рис. 3. Касательные напряжения в стержне углового профиля задача Б: а) τ_{xz} , Па; б) τ_{yz} , Па

Рис. 4. Касательные напряжения в стержне углового профиля задача В: а) τ_{xz} , Па; б) τ_{yz} , Па

Таблица 2

Предельные значения касательных напряжений в стержне углового сечения

Напряжения	Max		Min	
	Задача Б	Задача В	Задача Б	Задача В
τ_{xz}	194 МПа	4 049 МПа	– 542 МПа	– 11 414 МПа
τ_{yz}	463 МПа	15 915 МПа	– 190 МПа	– 4 274 МПа

Таблица 3

Проверочные и расчетные значения крутильной жесткости и угла закручивания для задач Б и В

Коэффициент α для углового профиля			Крутильная жесткость C , рассчитанная по формуле (5), Н·м ²		Угол закручивания $\theta = M/C$	
			Задача Б	Задача В	Задача Б	Задача В
По опытам А. Феппля	Для различных образцов	0,86–1,10	153 524–196 368	1 784–2 282	0,051–0,065	4,380–5,602
	Средний	0,99	176 731	2 054	0,056	4,867
По опытам ЦНИИПСа		1,0	178 516	2 075	0,056	4,819
Расчет во FreeFEM			154 813	2 030	0,064	4,925

Установлено, что численные значения касательных напряжений и углов закручивания в рассмотренной задаче при расчете тонкостенного углового профиля существенно превышают их предельно допустимые значения, обычно принимаемые при расчетах на прочность и жесткость. Этот результат получен как при использовании стандартного инженерного метода, так и при решении в пакете FreeFEM++.

В целом пакет прикладных программ FreeFEM++ является надежным инструментом решения стандартных технических задач анализа кручения стержней методом конечных элементов, с возможностями наглядного представления результатов расчета.

Численные эксперименты были проведены на вычислительном кластере ЦКП «Центр данных ДВО РАН».

Список литературы

1. Рукавишников В.А., Николаев С.Г. Весовой метод конечных элементов для задачи теории упругости с сингулярностью // Доклады АН. 2013. Т. 453. № 4. С. 378–382. DOI: 10.7868/S0869565213340069.

2. Pietraszkiewicz W., Konopińska V. Junctions in shell structures: A review. Thin-Walled Structures. 2015. vol. 95. P. 310–334. DOI: 10.1016/j.tws.2015.07.010.

3. Deng H., Li F., Cai Q., Dong J., Fu P. Experimental and numerical analysis on the slope change joint of a quartet-steel-tube-column transmission tower. Thin-Walled Structures. 2017. vol. 119. P. 572–585. DOI: 10.1016/j.tws.2017.07.006.

4. Астионенко И.А., Гучек П.И., Литвиненко Е.И., Хомченко А.Н. Применение альтернативных серендиповых моделей при решении задачи о кручении призматических стержней // Вестник ХНТУ. 2013. № 1 (46). С. 356–361.

5. Дьяков С.Ф., Лалин В.В. Построение и анализ конечных элементов тонкостенного стержня открытого профиля с учетом деформаций сдвига при кручении // Вестник Пермского государственного технического университета. 2011. № 2. С. 130–140.

6. Font R., Periago F. The finite element method with FreeFem++ for beginners. The Electronic Journal of Mathematics and Technology. 2013. vol. 7. no. 4. P. 289–307.

7. Nedin R.D., Vatulyan A.O. On the reconstruction of inhomogeneous initial stresses in plates. Advanced Structured Materials. 2011. vol. 15. P. 165–182. DOI: 10.1007/978-3-642-21855-2_13.

8. Прочность, устойчивость, колебания: справочник в 3 т. Т. 1 / Под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. М.: Изд-во Машиностроение, 1968. 831 с.

9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. VII. Теория упругости: учеб. пособие. 4-е изд. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 248 с.