УДК 62-2:534.01

**МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ
ЖЕСТКОГО РОТОРА НА ПОДАТЛИВЫХ ПОДШИПНИКАХ****Сафина Г.Ф.***ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет», Нефтекамский филиал,
Нефтекамск, e-mail: safinagf@mail.ru*

Рассмотрена прямая спектральная задача определения частот свободных колебаний жесткого ротора, закрепленного с обоих концов подшипниками на податливых опорах. Смоделирована динамическая модель ротора с подшипниками, совмещенная с трехмерной координатной системой, выбраны обобщенные координаты. По конечному набору степеней свободы получены дифференциальные уравнения для центра тяжести ротора и его поворотов относительно осей координат. С учетом совершаемых малых гармонических колебаний ротора на подшипниках найдено вековое уравнение задачи, по которому определяются частоты четырех нормальных форм колебательного процесса. Приведен пример решения прямой задачи. С использованием математических моделей проведено исследование влияния на частоты колебаний ротора его физических характеристик, таких как масса ротора, жесткости податливых опор в различных направлениях. Показано, что увеличение массы ротора ведет к уменьшению частот колебаний, а увеличение коэффициентов жесткости опор как в горизонтальном, так и в вертикальном направлениях ведет к увеличению частот колебаний ротора. Причем одновременное увеличение всех параметров жесткости ведет к более сильному росту значений частот колебаний. Приведены таблицы, подтверждающие установленные зависимости. Решение поставленных задач сопровождается применением стандартных команд математического пакета Maple. Проведенные исследования прямой спектральной задачи учитываются при решениях проблем сохранения безопасных частот колебания ротора.

Ключевые слова: ротор на подшипниках, свободные колебания, собственные частоты, вековое уравнение, физические параметры

**MODELING OF FREE OSCILLATIONS OF RIGID ROTOR
ON FLEXIBLE BEARINGS IN TASK****Safina G.F.***Bashkir State University, Neftekamsk branch, Neftekamsk, e-mail: safinagf@mail.ru*

Direct spectral problem of determination of frequencies of free oscillations of rigid rotor fixed at both ends by bearings on flexible supports is considered. Dynamic model of rotor with bearings combined with three-dimensional coordinate system is simulated, generalized coordinates are selected. Differential equations for the center of gravity of the rotor and its rotations relative to coordinate axes are obtained from the final set of degrees of freedom. Taking into account the performed small harmonic oscillations of the rotor on bearings, the age-old equation of the task is obtained, from which frequencies of four normal forms of oscillatory process are determined. This is an example of solving a direct problem. Using mathematical models, the influence on the rotor vibration frequencies of its physical characteristics, such as rotor mass, of the stiffness of flexible supports in different directions was studied. It is shown that increase of rotor weight leads to decrease of vibration frequencies, and increase of support stiffness coefficients in both horizontal and vertical directions leads to increase of rotor vibration frequencies. Note here that simultaneous increase of all stiffness parameters leads to stronger increase of oscillation frequencies. The tables confirming the established dependencies are shown. The solution of the set tasks is accompanied by the application of standard commands of the mathematical package Maple. Performed investigations of direct spectral problem are taken into account in solving problems of maintaining safe frequencies of rotor oscillation.

Keywords: Rotor on bearings, free oscillations, natural frequencies, age equation, physical parameters

Роторы, валы, балки и другие элементы являются частыми составляющими подвижных и неподвижных механических систем [1; 2]. Известно, что по акустическому отклику конструкций возможно восстановление различного рода неисправностей таких систем. Исследования, связанные с изношенностью, а также с изменениями физических параметров конструкций, играют важную роль при решениях проблем сохранения безопасных частот свободных колебаний [3; 4].

Действительно, частыми случаями на практике являются колебания, возникающие при отсутствии какого-либо внешнего периодического возбуждения. Это и сравнительно простые процессы свободных колебаний, возникающие после мгновенного нарушения состояния устойчивого

равновесия механической системы, и более сложные процессы, такие как автоколебания систем.

Большое внимание исследователей в настоящее время привлечено к вопросам колебаний самых разнообразных механических конструкций (автомобилей, кораблей и самолетов, инженерных сооружений, роторов турбин, валов двигателей, турбинных лопаток, воздушных и гребных винтов, перекрытий промышленных зданий и т.п.).

Многие научные труды по теории колебаний включают задачи свободных колебаний валов, роторов, например работы [2; 5; 6]. Целью данной работы является построение динамической модели ротора, закрепленного податливыми подшипниками с различными жесткостями в горизонтальном и вертикальном направлениях, получение

ние дифференциальных уравнений, описывающих колебательный процесс. В работе приводится также вывод векового уравнения прямой спектральной задачи. С помощью построенной программы по алгоритму решения задачи исследуется зависимость частот колебаний ротора от его физических параметров. Полученные результаты учитываются при обеспечении надежности механических колебательных процессов, составляющими которых являются роторы на податливых подшипниках.

Прямая задача определения частот свободных колебаний ротора на подшипниках

Смоделируем свободные колебания жесткого ротора, закрепленного подшипниками на податливых опорах.

Систему координат $Oxyz$ совмещаем с ротором так, как представлено на рисунке. За обобщенные координаты принимаем угловые перемещения β, γ оси ротора, а также перемещения y_0, z_0 центра тяжести ротора и малые перемещения y_1, z_1, y_2, z_2 подшипников в направлениях осей Oy и Oz [2].

Модель ротора на податливых подшипниках

Здесь: W и J – масса ротора и момент инерции его поперечного сечения; c_1, c_2 и d_1, d_2 – коэффициенты жесткостей подвижных опор в горизонтальном и вертикальном направлениях соответственно; l_1, l_2 – расстояния от центра тяжести ротора до его податливых опор, причем $l_1 + l_2 = l$.

По такой динамической модели для центра тяжести и угловых перемещений имеем равенства:

$$y_0 = y_1 \frac{l_2}{l} + y_2 \frac{l_1}{l}, \quad z_0 = z_1 \frac{l_2}{l} + z_2 \frac{l_1}{l}, \quad \beta = \frac{y_2 - y_1}{l}, \quad \gamma = \frac{z_2 - z_1}{l}.$$

Тогда соответствующие дифференциальные уравнения перемещений центра тяжести ротора и его поворотов относительно указанных осей примут вид:

$$\begin{cases} \frac{W}{gl}(l_2 \ddot{y}_1 + l_1 \ddot{y}_2) + c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0, \\ \frac{W}{gl}(l_2 \ddot{z}_1 + l_1 \ddot{z}_2) + d_1 z_1 + d_2 z_2 = 0. \end{cases} \begin{cases} JW \frac{\dot{y}_2 - \dot{y}_1}{l} - J_1 \frac{\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1}{l} = z_2 l_2 d_2 - z_1 d_1 l_1, \\ JW \frac{\dot{z}_2 - \dot{z}_1}{l} + J_1 \frac{\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1}{l} = -y_2 c_2 l_2 + y_1 c_1 l_1. \end{cases} \quad (1)$$

Четыре уравнения системы (1) описывают моделируемый колебательный процесс.

Вывод векового уравнения прямой задачи

С учетом свободных колебаний жесткого ротора на нежестких опорах принимаем колебательный процесс гармоническим:

$$y_1 = M_1 \sin pt, \quad y_2 = M_2 \sin pt, \quad z_1 = M_3 \cos pt, \quad z_2 = M_4 \cos pt, \quad (2)$$

где $M_i, (i = \overline{1,4})$ – амплитуды, p – собственная частота колебаний ротора.

Тогда с учетом (2) уравнения (1) примут вид

$$\begin{cases} JW \frac{M_2 p \cos pt - M_1 p \cos pt}{l} - J_1 \frac{-M_4 p^2 \cos pt + M_3 p^2 \cos pt}{l} = M_4 \cos pt l_2 d_2 - M_3 \cos pt d_1 l_1; \\ JW \frac{-M_4 p \sin pt + M_3 p \sin pt}{l} + J_1 \frac{-M_2 p^2 \sin pt + M_1 p^2 \sin pt}{l} = -M_2 \sin pt c_2 l_2 + M_1 \sin pt c_1 l_1; \\ \frac{W}{gl}(-l_2 M_1 p^2 \sin pt + l_1 M_2 p^2 \sin pt) + c_1 M_1 \sin pt + c_2 M_2 \sin pt = 0; \\ \frac{W}{gl}(-l_2 M_3 p^2 \cos pt - l_1 M_4 p^2 \cos pt) + d_1 M_3 \cos pt + d_2 M_4 \cos pt = 0. \end{cases}$$

Преобразуя последнюю систему, определяем четыре однородных уравнения относительно амплитуд M_i , ($i = 1, 4$) колебаний ротора.

Далее с учетом существования ненулевого решения этой системы [7] найдем вековой определитель для нашей задачи в виде:

$$\begin{vmatrix} \frac{JWp}{l} & \frac{JWp}{l} & -\frac{p^2 J_1}{l} + c_2 l_2 & \frac{p^2 J_1}{l} - d_2 l_2 \\ \frac{p^2 J_1}{l} - c_1 l_1 & -\frac{p^2 J_1}{l} + c_2 l_2 & \frac{JWp}{l} & -\frac{JWp}{l} \\ -\frac{p^2 l_2 W}{gl} + c_1 & -\frac{p^2 l_1 W}{gl} + c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p^2 l_2 W}{gl} + d_1 & -\frac{p^2 l_1 W}{gl} + d_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Преобразования определителя приводят его к уравнению восьмого порядка относительно частоты колебаний

$$Ap^8 + Bp^6 + Cp^4 + Dp^2 + E = 0. \quad (3)$$

с коэффициентами, содержащими в себе физические параметры жесткого ротора и податливых подшипников:

$$A = \frac{1}{l^4 g^2} (-J_1^2 l_1^2 W^2 - 2J_1^2 l_1 W^2 l_2 - W^2 l_2^2 J_1^2).$$

$$B = \frac{1}{l^4 g^2} (W^4 l_2^2 J^2 + W l_2 J_1^2 d_1 g l + W^2 l_2 J_1 d_1 l_1^2 l + W^2 l_2^3 J_1 d_2 l + W^2 l_2^3 c_2 l J_1 + J_1^2 c_2 g l l_1 W + \\ + J^2 W^4 l_1^2 + J_1^2 l_1 W d_1 g l + W^2 l_2^2 c_2 l J_1 l_1 + J_1^2 l_1 W d_2 g l + J_1 l_1 W^2 l_2^2 d_2 l + W l_2 J_1^2 d^2 g l + c_1 l_1^2 l W^2 l_2 J_1 + \\ + J_1^2 c_2 g l W l_2 + c_1 l_1^3 l W^2 J_1 + J_1 l_1^3 W^2 d_1 l + c_1 g l J_1^2 l_1 W + 2J^2 W^4 l_1 l_2 + c_1 g l J_1^2 W l_2);$$

$$C = \frac{1}{l^4 g^4} (-c_1 l_1^2 l^2 W J_1 d_2 g - W l_2^2 c_2 l^2 d_1 g J_1 - 2c_1 l_1 l^2 c_2 g W l_2 J_1 - J^2 W^3 l_1 d_1 g l - J^2 W^3 c_2 g l l_1 - \\ - J^2 W^3 c_2 g l l_2 - J^2 W^3 l_1 d_2 g l - W^2 l_2^2 c_2 l^2 d_1 l_1^2 - c_1 g l J^2 W^3 l_2 - c_1 l_1^2 l^2 c_2 g J_1 W - c_1 l_1^4 l^2 W^2 d_1 - \\ - c_1 g l^2 J_1 W l_2^2 d_2 - 2c_1 l_1^2 l^2 W d_1 g J_1 - J_1^2 c_2 g^2 l^2 d_2 - c_1 g l^2 c_2 l_2^2 W J_1 - c_1 g l^2 W^3 l_1 - 2J_1 c_2 g l^2 W l_2^2 d_2 - \\ - c_1 g^2 l^2 J_1^2 d_1 - 2J_1 l_1 W d_1 g l^2 d_2 l_2 - J_1 c_2 g l^2 d_1 l_1^2 W - J_1 l_1^2 W d_1 l^2 d_2 g - J_1^2 c_2 g^2 l^2 d_1 - W^3 l_2 J^2 d_2 g l - \\ - W^3 l_2 J^2 d_1 g l - W l_2^2 J_1 d_1 g l^2 d_2 - c_1 l_1^2 l^2 W^2 l_2^2 d_2 - W^2 l_2^4 c_2 l^2 d_2 - c_1 g^2 l^2 J_1^2 d_2); \quad (4)$$

$$D = \frac{1}{l^4 g^2} (c_1 g^2 l^3 J_1 d_1 d_2 l_2 + c_1 l_1^3 l^3 W d_1 d_2 g + J^2 W^2 c_2 g^2 l^2 d_2 + W l_2^3 c_2 l^3 d_1 g d_2 + c_1 g^2 l^3 c_2 l_2 d_1 J_1 + \\ + c_1 l_1 l^3 c_2 g W l_2^2 d_2 + J_1 c_2 g^2 l^3 d_1 l_1 d_2 + J^2 W^2 c_2 g^2 l^2 d_1 + c_1 g^2 l^2 J^2 W^2 d_1 + c_1 l_1^2 l^3 W d_1 g d_2 l_2 + \\ + c_1 g^2 l^2 J^2 W^2 d_2 + c_1 g l^3 c_2 l_2^3 W d_2 + c_1 l_1 l^3 c_2 g^2 J_1 d_2 + c_1 l_1^3 l^3 c_2 g d_1 W + W l_2^2 c_2 l^3 d_1 l_1 d_2 g + \\ + c_1 g l^3 c_2 l_2 d_1 l_1^2 W + c_1 g^2 l^3 c_2 l_2 J_1 d_2 + J_1 c_2 g^2 l^3 d_1 d_2 l_2 + c_1 l_1 l^3 c_2 g^2 d_1 J_1);$$

$$E = \frac{1}{l^4 g^2} (-c_1 g^2 l^4 c_2 l_2^2 d_1 d_2 - 2c_1 l_1 l^4 c_2 g^2 d_1 d_2 l_2 - c_1 l_1^2 l^4 c_2 g^2 d_1 d_2).$$

Вековое уравнение (3)–(4) позволяет находить частоты нормальных форм колебаний жесткого ротора, закрепленного подшипниками на податливых опорах.

Применение математической модели (3)–(4) представим на примере. Пусть известны физические параметры ротора на подвижных опорах: $J = 0,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $l = 0,3 \text{ м}$, $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $c_1 = 0,9 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$, $c_2 = 0,1 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$, $W = 2 \text{ кг}$, $d_1 = 1,5 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$, $d_2 = 0,2 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$, $J_1 = 0,25 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $l_1 = 0,1 \text{ м}$, $l_2 = 0,2 \text{ м}$.

Определим собственные частоты колебаний ротора.

Подстановка заданных физических параметров ротора и подшипников в (4), а затем в (3) приводит к уравнению:

$$-0,0289p^8 + 0,8496p^6 - 7,3486p^4 + 19,0034p^2 - 0,0024 = 0.$$

Решение последнего уравнения, найденное с помощью программы в математическом пакете Maple, следующее: $\pm 0,011$, $\pm 2,211$, $\pm 2,881$, $\pm 4,022$.

Следовательно, собственные частоты колебаний ротора, соответствующие заданным характеристикам:

$$p_1 = 0,011 \text{ с}^{-1}, \quad p_2 = 2,211 \text{ с}^{-1}, \\ p_3 = 2,881 \text{ с}^{-1}, \quad p_4 = 4,022 \text{ с}^{-1}.$$

Полученная по алгоритму решения прямой задачи программа подтверждает также четырехчастотный колебательный процесс, полученный при его математическом и физическом моделировании.

Зависимость частот колебаний ротора на подшипниках от физических параметров

Рассмотрим теперь с помощью полученной математической модели (3), (4) влияние характеристик ротора на значения собственных частот его колебаний.

Даны следующие параметры ротора и подшипников:

$$J = 0,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad l = 0,3 \text{ м}, \quad g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \quad c_1 = 0,9 \frac{\text{Н}}{\text{м}},$$

$$c_2 = 0,1 \frac{\text{Н}}{\text{м}}, \quad W = 2 \text{ кг}, \quad d_1 = 1,5 \frac{\text{Н}}{\text{м}}, \quad d_2 = 0,2 \frac{\text{Н}}{\text{м}},$$

$$J_1 = 0,25 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad l_1 = 0,1 \text{ м}, \quad l_2 = 0,2 \text{ м}. \quad (5)$$

Для исследований меняем какие-либо физические характеристики (например, массу ротора), оставляя другие характеристики постоянными. И с помощью модели (3), (4) будем определять соответствующие изменения в частотном спектре задачи.

Проведенные с помощью программы Maple расчеты показывают уменьшение

частот колебаний при увеличении массы ротора или момента инерции поперечного его сечения. Это можно увидеть, например, в табл. 1.

Таблица 1
Зависимость частот от массы ротора при его параметрах (5)

$W, \text{ кг}$	$p_1, \text{ с}^{-1}$	$p_3, \text{ с}^{-1}$
2	0,011	2,881
3	0,007	1,806
4	0,005	1,565
5	0,004	1,399
6	0,003	1,345

Расчеты влияния на значения частот колебаний ротора жесткостей его подвижных опор показывают, что здесь образуется прямая зависимость: увеличение параметров жесткости ведет к увеличению частот колебаний. Результаты вычислений представлены, например, табл. 2, 3.

Таблица 2
Зависимость частот от коэффициента жесткости податливых подшипников в горизонтальном направлении (при параметрах (5) ротора)

$c_1, \frac{\text{Н}}{\text{м}}$	$p_1, \text{ с}^{-1}$	$p_2, \text{ с}^{-1}$
0,2	0,011	1,399
0,6	0,014	1,979
1	0,015	2,423
1,4	0,015	2,795
1,8	0,016	2,998

Таблица 3
Зависимость частот ротора от коэффициентов жесткости в горизонтальном направлении при параметрах (5) ротора

$c_1, \frac{\text{Н}}{\text{м}}$	$c_2, \frac{\text{Н}}{\text{м}}$	$p_1, \text{ с}^{-1}$	$p_2, \text{ с}^{-1}$
0,100	0,100	0,0084	0,9898
0,500	0,500	0,0188	1,2126
1,100	1,100	0,0278	2,8810
2,000	2,000	0,0373	2,8813
2,400	2,400	0,0412	2,8815

Проведенные расчеты показывают также, что одновременное увеличение жесткостей подвижных опор ротора (как в горизонтальном, так и в вертикальном направлениях) приводит к более значительному росту значений частот, чем при увеличении только в одном направлении. В подтверждение сказанного приведена табл. 4.

Таблица 4

Зависимость частот колебаний от коэффициентов жесткостей опор в горизонтальном и вертикальном направлениях при параметрах (5) ротора

$c_1, \frac{H}{M}$	$c_2, \frac{H}{M}$	$d_1, \frac{H}{M}$	$d_2, \frac{H}{M}$	p_1, c^{-1}	p_2, c^{-1}	p_3, c^{-1}
0,1	0,1	0,1	0,1	0,004	0,989	0,991
0,6	0,6	0,6	0,6	0,026	2,421	2,425
1	1	1	1	0,044	3,119	3,131
2	2	2	2	0,088	4,039	4,429
2,8	2,8	2,8	2,8	0,112	4,143	4,502

Аналогичные зависимости влияния характеристик масс и жесткостей на частотный спектр наблюдаются и при других физических характеристиках механической системы, отличных от (5).

Заключение

Рассмотрена прямая задача малых свободных колебаний ротора на подвижных опорах. Построены дифференциальные уравнения перемещений центра тяжести ротора и его поворотов относительно осей по двум подвижным направлениям. По динамической модели найдено вековое уравнение задачи с определением частот нормальных форм колебаний.

С помощью векового уравнения исследовано влияние на частоты колебаний ротора его физических параметров. Построены зависимости при различных характеристиках ротора и подшипников. Показано, что увеличение параметров жесткости увеличивает значения частот, а увеличение массовых параметров – уменьшает значения частот колебаний. Проведенные исследования учитываются при решении проблем диагностики технических конструкций, связанных

с изменениями в физических параметрах различного вида роторных конструкций.

Результаты исследований могут представить как теоретический, так и практический интерес при определении частот колебаний любого ротора на нежестких опорах. Причем как на этапах доводки, проектирования двигателей (насосов, осевых и центробежных компрессоров) машиностроения, так и на этапах практических спектральных расчетов.

Список литературы

1. Вульфсон И.И. Динамика машин. Колебания. М.: Юрайт, 2017. 275 с.
2. Гольдин А.С. Вибрация роторных машин. М.: Машиностроение, 2000. 344 с.
3. Костюков В.Н., Науменко А.П., Бойченко С.Н., Тарасов Е.В. Основы виброакустической диагностики машинного оборудования. Омск: НПЦ ДИНАМИКА, 2007. 286 с.
4. Бьюи Х.Д. Механика разрушения: обратные задачи и решения. М.: Физматлит, 2011. 412 с.
5. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: Ленанд, 2017. 416 с.
6. Баев В.К. Теория колебаний. М.: Юрайт, 2019. 348 с.
7. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения: Учебное пособие для вузов. М.: Альянс, 2016. 392 с.