УДК 519.711.2

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПОКАЗАТЕЛЯ РАВНОМЕРНОСТИ РАДИОЧАСТОТНОГО СПЕКТРА СВЕРХШИРОКОПОЛОСНОГО СИГНАЛА

¹Сеньков М.А., ²Киселев К.В., ³Быков А.А.

¹Военная академия войсковой противовоздушной обороны Вооруженных Сил РФ
им. Маршала Советского Союза А.М. Василевского, Смоленск, e-mail: vavpvo-na@mil.ru;

²АО НПП «Измеритель», Смоленск, e-mail: izmerit@smoltelecom.ru;

³Филиал ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский университет МЭИ»,
Смоленск, e-mail: mail@sbmpei.ru

В статье представлен один из подходов к разработке математической модели количественной оценки показателя равномерности радиочастотного спектра с целью обеспечения скрытности систем радиосвязи. В описываемой модели функционал радиосигнала рассматривается как переменная величина, значение которой зависит от вида функции, которая описывает радиочастотный спектр исследуемого сигнала, что позволяет применять данную модель в различных областях радиосвязи как военного, так и гражданского назначения. Рассмотрен подход к реализации модели в общем виде для любой выпуклой функции на основе понятия полной (математической) индукции с применением теоремы Йенсена, описывающей радиочастотный спектр исследуемого сигнала, и для функции в интегральной форме, используемой для отображения непрерывного спектра радиосигнала. Применение разработанной математической модели позволяет синтезировать технически реализуемые сверхширокополосные сигналы, имеющие высокое значение показателя скрытности, что обеспечивает защищенность информационных каналов связи. Созданные на основе данной модели синтезированные сигналы имеют форму спектра, близкого к форме прямоугольника, что свидетельствует о достижении максимума показателя скрытности сигнала. Кроме того, представленная математическая модель показателя равномерности радиочастотного спектра сверхширокополосного сигнала может широко использоваться в специализированном программном обеспечении анализаторов спектра для количественной оценки степени соответствия спектра сигналов радиосистемы выделенному для неё ресурсу радиочастотного спектра.

Ключевые слова: математическая модель, сверхширокополосный сигнал, радиочастотный спектр, скрытность радиосистем, математическая индукция, энтропия информации

DEVELOPMENT OF A MATHEMATICAL MODEL AN INDICATOR OF THE UNIFORMITY OF THE RADIO FREQUENCY SPECTRUM OF AN ULTRA-WIDEBAND SIGNAL

¹Senkov M.A., ²Kiselev K.V., ³Bykov A.A.

¹War Academy of military air defense of the Armed Forces of the Russian Federation. Marshal
of the Soviet Union A.M. Vasilevskiy, Smolensk, e-mail: vavpvo-na@mil.ru;

²AO NPP «Izmeritel», Smolensk, e-mail: izmerit@smoltelecom.ru;

³National Research University Moscow Power Engineering Institute, Smolensk, e-mail: mail@sbmpei.ru

The article presents one of the approaches to developing a mathematical model for quantifying the uniformity of the radio frequency spectrum in order to ensure the secrecy of radio communication systems. In the described model, the radio signal functional is considered as a variable, the value of which depends on the type of function that describes the radio frequency spectrum of the signal under study, which makes it possible to apply this model in various areas of radio communication, both military and civilian. We consider an approach to implementing the model in General form for any convex function based on the concept of complete (mathematical) induction using Jensen's theorem describing the radio frequency spectrum of the signal under study, and for the function in integral form used to display the continuous spectrum of the radio signal. Application of the developed mathematical model makes it possible to synthesize technically feasible ultra-wideband signals with a high value of the stealth indicator, which ensures the security of information communication channels. The synthesized signals created on the basis of this model have a spectrum shape close to the rectangle shape, which indicates that the maximum signal stealth indicator has been reached. In addition, the presented mathematical model of the radio frequency spectrum uniformity index of an ultra-wideband signal can be widely used in specialized software of spectrum analyzers for quantitative assessment of the degree of compliance of the radio system signal spectrum with the radio frequency spectrum resource allocated for it.

Keywords: mathematical model, ultra-wideband signal, radio frequency spectrum, radio system stealth, mathematical induction, information entropy

Современный мир характеризуется стремительным развитием технологий, в том числе технологий информационного противоборства. Одной из задач конкурирующих систем является взлом каналов радиосвязи

и доступ к конфиденциальной информации соперника. Военные ведомства сосредотачивают усилия на разработке и совершенствовании средств радиоэлектронной разведки и радиоэлектронной борьбы. Коммерческие

и государственные корпорации регулярно увеличивают затраты на информационную безопасность, защиту от кибернетических атак и сохранность конфиденциальной информации. Однако данная проблема не перестает затрагивать мирную жизнь. Совершенствование методов, способов и средств радиоэлектронной разведки оставляет актуальной задачу защиты информации, передаваемой по радиоканалам, от несанкционированного доступа.

Одним из способов защиты систем радиосвязи от взлома является повышение их скрытности за счёт использования сверхширокополосных сигналов. Это позволяет скрыть от противника сам факт радиопередачи, что делает невозможным применение в отношении системы радиосвязи методов взлома.

Поскольку технические возможности средств радиоэлектронной разведки зачастую неизвестны, то для достижения указанного выше эффекта необходимо стремиться к максимальной скрытности системы радиосвязи [1].

Эта характеристика системы радиосвязи в большей степени зависит от формы и параметров её радиочастотного спектра. Большей скрытностью обладают радиосистемы, спектр сигналов которых равномерно распределён в широком диапазоне частот. Отсутствие энергетических «всплесков» на общем радиочастотном фоне затрудняет обнаружение радиосистемы средствами радиоэлектронной разведки.

Поэтому для количественной оценки скрытности систем радиосвязи, в частности использующих сверхширокополосные сигналы, предлагается использовать показатель равномерности радиочастотного спектра [2].

Известно, что радиосигнал обладает наибольшей скрытностью, если его энергия равномерно распределена в заданном диапазоне частот [3]. То есть для достижения максимального значения данной характеристики спектр сигнала должен быть максимально равномерно распределён в заданной полосе частот, ограниченной выделенным для системы радиосвязи ресурсом радиочастотного спектра.

При равномерном спектре сигнала все гармоники используются с максимальной мощностью, и выявить из общего фона участки с повышенной (пониженной) энергией, учитывая конечные технические возможности средств радиоэлектронной разведки, становится проблематично [4]. Следовательно, усложняется задача обнаружения факта работы системы радиосвязи и организации информационного или энергетического воздействия на неё.

Целью статьи является описание математической модели показателя равномерности радиочастотного спектра сверхширокополосного сигнала, обеспечивающей рост скрытности систем радиосвязи за счёт обоснованного выбора формы используемых сигналов.

Материалы и методы исследования

Для решения задачи количественной оценки скрытности систем радиосвязи на основе анализа степени равномерности их радиочастотного спектра необходимо решить задачу сведения функции (спектра) к показателю. Показатель скрытности должен достигать максимума в случае, когда спектр сигналов системы радиосвязи максимально равномерно распределён в заданной полосе частот, т.е. имеет форму прямоугольника. В то же время минимальное значение показателя скрытности будет иметь любой идеализированный гармонический сигнал, спектр которого имеет ярко выраженный всплеск на конкретной частоте.

Разработку математической модели начнём с формулировки задачи в общем виде. Для этого представим функцию, описывающую радиочастотный спектр, в виде

$$K = F[G(j\omega)], \quad (1)$$

где K – показатель максимальной скрытности; $F[G(j\omega)]$ – функционал преобразования функции в показатель.

Функционал (1) представляет собой переменную величину, которая зависит от вида функции, описывающей радиочастотный спектр исследуемого сигнала. Значения амплитудных составляющих радиочастотного спектра, как правило, отличаются. То есть радиочастотный спектр может иметь участки с понижением энергии (выпуклая сверху функция) и участки с повышением энергии (выпуклая снизу функция), соответственно, при получении целевой функции используется неравенство Йенсена

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \geq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n), \quad (2)$$

где $y = f(x)$ – функция, выпуклая на некотором интервале;

$x_1, x_2, \dots, x_n$ – произвольные числа из этого интервала;

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – произвольные положительные числа, сумма которых равна единице.

Докажем, что рассмотренное неравенство справедливо для любой выпуклой функции.

Под выпуклой функцией $f(x)$ будем понимать функцию, для которой выполняется условие

$$f''(x) > 0.$$

Рис. 1. Геометрический смысл теоремы Иенсена для $n = 2$

Условимся, что функция $y = f(x)$ выпуклая на некотором интервале (рис. 1), $x_1, x_2, \dots, x_n$ – произвольные числа из этого интервала, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – произвольные положительные числа, у которых сумма равна единице.

Для доказательства используем понятие полной (математической) индукции.

Пусть $A(n)$ – зависящее от $n \in N$ утверждение. Если доказано, что $A(1)$ выполняется и при условии, что $A(n)$ справедливо для некоторого n , верно также $A(n + 1)$ (шаг индукции), то $A(n)$ справедливо для всех $n \in N$.

Для $n = 2$ выражение (2) примет вид

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_2 x_2) \geq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_2 f(x_2). \quad (3)$$

Геометрически выражение (3) представлено на рис. 1.

Как показано на рис. 1, прямая, образованная точками x_1, x_2 , лежит ниже графика функции $f(x)$, а значит, выполняется (2).

Зададим в качестве базы индукции выражение (3).

Проведём индукционный переход. Для этого воспользуемся индуктивным предположением, поскольку (2) справедливо для $n = 2$, значит, справедливо и для $n - 1$, т.е. имеем

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1}) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_{n-1} f(x_{n-1}).$$

Рассмотрим случай n – переменных:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n).$$

Поскольку

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n = 1,$$

то

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} = 1 - \alpha_n,$$

т.е.

$$\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_n} + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_n} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{1 - \alpha_n} = 1,$$

тогда

$$\begin{aligned} f\left((1 - \alpha_n)\left(\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_n} x_1 + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_n} x_2 + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{1 - \alpha_n} x_{n-1}\right) + \alpha_n x_n\right) &\geq \\ &\geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n); \end{aligned}$$

$$(1 - \alpha_n) \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_n} f(x_1) + (1 - \alpha_n) \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_n} f(x_2) + \dots + (1 - \alpha_n) \frac{\alpha_{n-1}}{1 - \alpha_n} f(x_{n-1}) + \alpha_n f(x_n) \geq$$

$$\geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n).$$

Что и требовалось доказать.

С помощью неравенства Иенсена докажем, что выпуклая функция принимает максимальное значение в случае равенства переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, т.е.

$$\sum_n f(x_1) \Big|_{x_1 = x_2 = \dots = x_n} \geq \sum_n f(x_n) \Big|_{x_1 \neq x_2 \neq \dots \neq x_n} . \quad (4)$$

Пусть

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n .$$

Так как

$$\sum_n \alpha_n = 1 , \quad (5)$$

то

$$\alpha_n = \frac{1}{n} .$$

Если

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n \quad (6)$$

и

$$\sum_n x_n = 1 , \quad (7)$$

то

$$x_n = \frac{1}{n} .$$

В качестве исходного выражения имеем

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \geq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n) . \quad (8)$$

С учётом (5) и (6) выражение (8) примет вид

$$f(x_1(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)) \geq \alpha_1 \sum_n f(x_n) ;$$

$$f(x_1) \geq \frac{1}{n} \sum_n f(x_n) ;$$

$$f(x_1) \geq \frac{1}{n} n f(x_1) ;$$

$$f(x_1) = f(x_1) . \quad (9)$$

Из (9) следует, что при $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ функция $f(x)$ принимает максимальное значение. Рассмотрим случай, когда

$$x_1 \neq x_2 \neq \dots \neq x_n ; \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n ,$$

тогда выражение (8) примет вид

$$f(\alpha_1(x_1 + \dots + x_n)) \geq \alpha_1 \sum_n f(x_n) . \quad (10)$$

С учётом (7) выражение (10) можно записать в виде

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{n} \sum_n f(x_n) . \quad (11)$$

Из выражения (11) видно, что в случае, когда $x_1 \neq x_2 \neq \dots \neq x_n$, функция $f(x)$ может принимать значения меньше максимального $f(1/n)$.

Из данного доказательства и выражений (9) и (11) можно сделать вывод, что

$$nf(x_1) \Big|_{x_1 = x_2 = \dots = x_n} \geq \sum_n f(x_n) \Big|_{x_1 \neq x_2 \neq \dots \neq x_n} . \quad (12)$$

А значит, утверждение (4) верно. Что и требовалось доказать.

Результаты исследования и их обсуждение

Представленное выше доказательство показывает, что функционал вида (3) может быть применим для вычисления степени равномерности спектра. В случае если все гармоники в спектре сигнала покажут сходные амплитуды (вариант, при котором выполняется условие (7)), функционал вида (12) получит максимально возможное значение.

$$K = \sum_n f[G(j\omega_n)] ,$$

где $f[G(j\omega)]$ – выпуклая функция.

Перейдём к интегральной форме записи неравенства Иенсена (для непрерывного спектра) [5]:

$$f\left(\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \alpha(x)g(x)dx\right) \geq \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \alpha(x)f(g(x))dx ; \quad (13)$$

$$\int \alpha(x)dx = 1; \int g(x)dx = 1, \quad (14)$$

где $g(x)$ и $\alpha(x)$ – функции, которые удовлетворяют условию (14) и определены в промежутке от $x_{\min}$ до $x_{\max}$ [6].

Учитывая (13), показатель (12) представим в следующем виде:

$$K = \int_{f_H}^{f_B} f[G(j\omega)]d\omega ,$$

где f_B – верхняя частота и f_H – нижняя частота в полосе частот, выделенной для сверхширокополосной системы радиосвязи.

В научных трудах Л. Больцмана и Дж.К. Максвелла, результаты которых представлены в литературе по теории информации [5], доказано, что энтропия имеет максимальное значение (15), когда состояния системы (возможности) равновероятны.

$$H(x)_{\max} = \ln M . \quad (15)$$

Энтропией системы называется сумма произведений вероятностей различных состояний системы на логарифмы этих вероятностей, взятая с противоположным знаком

$$H(x) = -\sum_{i=1}^m p_i \ln p_i ,$$

где m – число состояний системы (возможностей);

p_i – вероятность i -го состояния (возможности).

Для получения показателя с аналогией в теории информации, используем в качестве выпуклой функцию вида

$$f(x) = -x \ln x . \quad (16)$$

С учётом (16) математическая модель показателя равномерности радиочастотного спектра сверхширокополосного сигнала будет иметь вид

$$K = \int_{f_H}^{f_B} -|G(j2\pi f)| \cdot \ln[G(j2\pi f)]d\omega . \quad (17)$$

Значения показателя равномерности радиочастотного спектра
сверхширокополосных сигналов

Название генератора (тип сигнала)	Значение показателя равномерности спектра сигнала с учётом радиочастотной маски РФ, %
PD-0.04 (моноимпульс Гаусса)	50,1
TMG (отрицательной полярности)	61,6
TMG (положительной полярности)	74,2
TMG (радиоимпульс)	75,3

Рис. 2. Синтезированный радиоимпульс

В результате моделирования с использованием разработанной математической модели (17) и программы [7] получены значения показателя равномерности радиочастотного спектра сверхширокополосных сигналов некоторых генераторов, приведённые в таблице. Моделирование проводилось в сравнении с идеализированным сигналом, имеющим спектр прямоугольной формы (значение показателя равномерности 100%).

В целях достижения максимального значения показателя равномерности и повышения скрытности системы радиосвязи синтезирован радиоимпульс, форма которого во временной области показана на рис. 2. Значение показателя равномерности синтезированного сигнала составило 83 %. Это указывает на более высокую скрытность синтезированного сигнала по сравнению с сигналами, указанными в таблице, и принципиально более высокую скрытность по сравнению с более низкочастотными сигналами. Направлением дальнейших исследований является научное обоснование выбора параметров сверхширокополосных сигналов для применения в различных системах радиосвязи с учётом их технической реализуемости.

Проведённое моделирование показало эффективность разработанной математической модели для анализа спектров сверхширокополосных сигналов и исследования скрытности систем радиосвязи. Кроме того,

разработанная математическая модель показателя равномерности радиочастотного спектра сверхширокополосного сигнала может использоваться в специальном программном обеспечении анализаторов спектра для количественной оценки степени соответствия спектра сигналов радиосистемы выделенному для неё ресурсу радиочастотного спектра.

Список литературы

1. Шепета А.П., Махлин А.М., Львовский С.А. Особенности применения сверхширокополосных сигналов в современных РЛС // I-methods. 2016. Т. 8. № 3. С. 18–23.
2. Андрианова А.В. Разработка волоконно-оптического сегмента сверхширокополосных систем передачи информации на базе технологии Radio-over-Fiber: автореф. дис. ... канд. техн. наук. Уфа, 2016. 16 с.
3. Куприянов А.И., Сахаров А.В. Теоретические основы радиоэлектронной борьбы. М.: Вузовская книга, 2007. 356 с.
4. Макаренко С.И. Противодействие беспилотным летательным аппаратам. СПб.: Научное издание, 2020. 204 с.
5. Стратонович Р.Л. Теория информации. М.: Советское радио, 1975. 424 с.
6. Силаев Н.В., Сеньков М.А., Навродский А.В. Оценка разведзащищённости систем радиосвязи // Энергетика, информатика, инновации – 2018. Сб. трудов VIII-й Межд. науч.-техн. конф. В 3 т. Т. 2. Смоленск: «Универсум», 2018. С. 243–247.
7. Силаев Н.В., Сеньков М.А., Навродский А.В. Программа для определения эффективности использования спектральной полосы частот СШП системой передачи данных. М.: ОФЭРНИО ИУО РАО. Свидетельство о регистрации электронного ресурса № 22777. Дата регистрации: 23.05.2017 г.