УДК 51-74:656.11

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕШЕХОДНОГО ПОТОКА СРЕДНЕГО УРОВНЯ ПЛОТНОСТИ КАК ПОТОКА КЛАСТЕРОВ

Наумова Н.А.

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет»,
Краснодар, e-mail: Nataly_Naumova@mail.ru

Моделирование пешеходных потоков приобрело огромную значимость в последние десятилетия, так как строительство и проектирование мест притяжения большого количества людей требует создания условий безопасности. Актуальной задачей является разработка математической модели, позволяющей с достаточной степенью точности определять параметры пешеходных потоков для управления ими в режиме реального времени. Часто поток разбивается на связанные пары или кластеры (группы знакомых или члены одной семьи). В работе пешеходный поток рассматривается как поток случайных событий. Под событием понимается прибытие пешехода к точке плоскости с фиксированной координатой по оси, направленной вдоль движения потока. Прибытие к этой точке кластера интерпретируется как одно событие. Разработан алгоритм автоматизированного разбиения пешеходного потока среднего уровня плотности на кластеры. Пешеходный поток аппроксимируется с помощью закона Эрланга. Приведен метод определения параметров Эрланга по экспериментальным данным. С помощью методов теории случайных процессов выведены вероятностные функции, характеризующие случайный процесс прибытия пешеходов в фиксированную точку пространства. Рассмотрен также случай слияния нескольких потоков в фиксированной точке. Разработанный аналитический аппарат позволяет получать результат в режиме реального времени, поэтому модель применима в интеллектуальных транспортных системах.

Ключевые слова: пешеходный поток, математическая модель, случайный процесс, кластерный анализ, организация движения

MODELING A MEDIUM DENSITY PEDESTRIAN FLOW AS A CLUSTER FLOW

Naumova N.A.

Kuban State Technological University, Krasnodar, e-mail: Nataly_Naumova@mail.ru

Modeling pedestrian flows has gained immense importance in recent decades, since the construction and design of places of attraction for large numbers of people requires the creation of safety conditions. An urgent task is the development of a mathematical model that allows determining the parameters of pedestrian flows with a sufficient degree of accuracy to control them in real time. Often the stream is split into related pairs or clusters (groups of acquaintances or members of the same family). In the work, the pedestrian flow is considered as a flow of random events. An event is understood as the arrival of a pedestrian to a point on the plane with a fixed coordinate along the axis directed along the movement of the stream. Arriving at this point in the cluster is interpreted as one event. An algorithm has been developed for the automated dividing of a pedestrian traffic of an average density level into clusters. Pedestrian traffic is approximated using Erlang's law. A method for determining Erlang parameters from experimental data is presented. Using the methods of the theory of random processes, probabilistic functions are derived that characterize the stochastic process of pedestrian arrival at a fixed point in space. The case of merging several streams at a fixed point is also considered. The developed analytical apparatus allows obtaining results in real time, therefore the model is applicable in intelligent transport systems.

Keywords: pedestrian flow, mathematical model, stochastic process, cluster analysis, traffic organization

Моделирование пешеходных потоков приобрело огромную значимость в последние десятилетия, так как строительство и проектирование мест притяжения большого количества людей требует создания условий безопасности. Многие модели взаимодействия людей в потоке основаны на аналогичных моделях для потоков транспортных средств. Однако движение пешеходов гораздо более неустойчиво, больше зависит от поведения отдельных индивидуумов. Кроме того, в отличие от транспортного потока, здесь допускаются «столкновения», пешеходы могут задевать друг друга при движении, и это не будет являться причиной инцидента или затора. Эти факты учитываются при микроскопическом моделировании. Кроме того, даже достаточно

организованный поток, следующий в определенном направлении, часто разбивается на связанные пары или кластеры (группы знакомых, члены одной семьи и т.п.).

Классически по уровню детализации модели пешеходных потоков делят на:

- микроскопические, которые учитывают поведение каждого пешехода отдельно [1, 2];
- мезоскопические, учитывающие поведение отдельного пешехода, но с целью определения характеристик потока или его закона распределения [3, 4];
- макроскопические, которые описывают поток в терминах скорости, плотности, без учета поведения отдельных индивидуумов [5].

Экспериментально доказана также теория феномена самоорганизации пешеход-

ного потока, который не планируется извне и не организуется внешним источником, таким как светофоры или поведенческие соглашения [2]. Особый интерес здесь представляют условия формирования:

- полосы движения в заданном направлении;
- реверсивные потоки в дверных проемах.

Отметим, что эти эффекты самоорганизации представляют собой модели поведения, которые не планируются извне, но неизбежно происходят по истечении определенного периода времени при движении потоков пешеходов.

Актуальной задачей является разработка математической модели, позволяющей с достаточной степенью точности определять параметры пешеходных потоков для управления ими в режиме реального времени.

Целью данной работы является разработка математической модели пешеходного потока как потока кластеров и метода определения параметров данного потока в режиме реального времени.

Материалы и методы исследования

В случае направленного движения пешеходов к переходу удобно применять модели, описывающие поток как случайный процесс с помощью случайных функций. Такую степень детализации данных относят к мезоскопической. Как отмечено выше, потоку пешеходов свойственно разделение на кластеры (группы родственников, знакомых и т.п.) [6]. Если описывать поток как поток случайных событий, то под событием будем понимать прибытие пешехода к точке плоскости с фиксированной координатой по оси, направленной вдоль движения потока. При этом прибытие к этой точке кластера следует интерпретировать как одно событие.

В модели TIMeR_Mod [7], разработанной автором, автотранспортный поток описывается как поток Пальма, интервалы по времени между которыми подчиняются обобщенному закону Эрланга. Подобного подхода будем придерживаться и при моделировании пешеходного потока.

Результаты исследования и их обсуждение

1. Алгоритм разбиения пешеходного потока среднего уровня плотности на кластеры

Видеодетекторы определяют мгновенные декартовы координаты $(x_i; y_i)$ объектов (пешеходов) при съемке пешеходного потока сверху в локальной системе координат. Ось Ox направлена по направлению движения пешеходного потока d_{free} – кри-

тическое значение расстояния между пешеходами, при котором их движение можно считать свободным.

1) вводим локальную систему координат для момента $t = 0$ и определяем координаты $(x_i; y_i)$ объектов в этой системе;

2) формируем первый кластер:

2.1) начиная с левого нижнего угла (начало координат), определяем расстояния d_{li} от объекта номер 1 с координатами $(x_1; y_1)$ до остальных объектов, входящих в прямоугольник, задаваемый ограничениями

$$\begin{cases} |x_i - x_1| \leq d_{free} \\ |y_i - y_1| \leq d_{free} \end{cases} :$$

$$d_{li} = \sqrt{(x_i - x_1)^2 + (y_i - y_1)^2} ;$$

2.2) если $d_{li} \leq d_{free}$, то объекты P_1 и P_i объединяем в один кластер;

2.3) берем следующий объект P_j из кластера 1 и определяем расстояния d_{ji} от объекта P_j с координатами $(x_j; y_j)$ до остальных объектов, входящих в прямоугольник, зада-

$$\begin{cases} |x_i - x_j| \leq d_{free} \\ |y_i - y_j| \leq d_{free} \end{cases} :$$

$$d_{ji} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} ;$$

2.4) если $d_{ji} \leq d_{free}$, то объекты P_i включаем в первый кластер;

2.5) повторяем пункты 2.3 и 2.4 для всех объектов, входящих в первый кластер;

3) двигаясь вверх, вправо, вниз, вправо и т.д., формируем следующий кластер номер N :

3.1) берем объект P_n , не входящий ни в один кластер, и определяем расстояния d_{ni} от объекта P_n с координатами $(x_n; y_n)$ до остальных объектов, входящих в прямоугольник, задаваемый ограничениями

$$\begin{cases} |x_i - x_n| \leq d_{free} \\ |y_i - y_n| \leq d_{free} \end{cases} :$$

$$d_{ni} = \sqrt{(x_i - x_n)^2 + (y_i - y_n)^2} ;$$

3.2) если $d_{ni} \leq d_{free}$, то объекты P_n и P_i объединяем в один кластер N ;

3.3) берем следующий объект P_j из кластера N и определяем расстояния d_{ji} от объекта P_j с координатами $(x_j; y_j)$ до остальных объектов, входящих в прямоугольник, зада-

$$\begin{cases} |x_i - x_j| \leq d_{free} \\ |y_i - y_j| \leq d_{free} \end{cases} :$$

$$d_{ji} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} ;$$

3.4) если $d_{ji} \leq d_{free}$, то объекты P_i включаем в кластер N ;

3.5) повторяем пункты 3.3 и 3.4 для всех объектов, входящих в кластер N ;

4) повторяем пункт 3 до тех пор, пока не разобьем все объекты, входящие в срез при $t = 0$ на кластеры;

5) для каждого кластера определяем центр $(x_{c,N}; y_{c,N})$; пусть $M_N = \{(x_{i,N}, y_{i,N})\}$ – множество координат объектов $P_{i,N}$ входящих в кластер N ; $x_{\max,N} = \max_i \{x_{i,N}\}$, $x_{\min,N} = \min_i \{x_{i,N}\}$, $y_{\max,N} = \max_i \{y_{i,N}\}$, $y_{\min,N} = \min_i \{y_{i,N}\}$. В этих обозначениях

$$\begin{cases} \frac{x_{\min,N} + x_{\max,N}}{2} = x_{c,N} \\ \frac{y_{\min,N} + y_{\max,N}}{2} = y_{c,N} \end{cases}$$

2. *Определение параметра λ интенсивности пешеходного потока*

Определяем величины интервалов T_i по времени (в секундах) между прохождением центров кластеров точки с фиксированной координатой по оси OX . Считая поток кластеров простейшим, определяем

параметр $\lambda = \frac{1}{\bar{T}}$, где $\bar{T} = \frac{\sum_{i=1}^m T_i}{m}$ – выборочная средняя случайной величины T .

В более общем случае при повышении плотности поток кластеров пешеходов может подчиняться (специальному) закону Эрланга. Тогда параметры распределения находятся следующим образом с помощью метода моментов [9]:

$$k^* = \frac{\left(\frac{\bar{T}}{\sigma^2}\right)^2}{\sigma^2}, \text{ где } \sigma^2 - \text{выборочная дисперсия случайной величины } T;$$

$k = [k^*] + 1$ – целое число, большее k^* ;

$$\lambda = \frac{k^*}{\bar{T}}.$$

3. *Определение параметров пешеходных потоков, прибывающих к данному пешеходному переходу по двум направлениям*

Согласно проведенным исследованиям, поток кластеров пешеходов может быть аппроксимирован законом Эрланга порядков $k = 1$ (показательный закон) или $k = 2$. При более плотных потоках лучше не разбивать пешеходов на кластеры, а фиксировать интервалы по времени между отдельными пешеходами и использовать закон Эрланга при больших значениях k .

Плотность распределения Эрланга [8]:

$$f^{(k)}(t) = \lambda(\lambda t)^{k-1} e^{-\lambda t} / (k-1)! \quad (t > 0); \quad (1)$$

интегральная функция распределения Эрланга:

$$F^{(k)}(t) = 1 - \sum_{n=0}^{k-1} \left((\lambda t)^n e^{-\lambda t} \right) / n! = 1 - R(k-1, \lambda t) \quad (t > 0). \quad (2)$$

Пусть $F_1^{(k_1)}(t)$ – функция распределения первого потока кластеров пешеходов, а $F_2^{(k_2)}(t)$ – функция распределения первого и второго кластеров пешеходов. Вероятность того, что за время T^{**} в первом потоке к данной точке не подойдет ни один кластер, равна

$$P(T > T^{**}) = 1 - F_j^{(k_j)} = \sum_{n=0}^{k_j-1} \left((\lambda_j t)^n e^{-\lambda_j t} \right) / n! = R(k_j-1, \lambda_j t). \quad (3)$$

Функция распределения минимума L случайных величин:

$$F_{r^{(L)}}(t) = 1 - \prod_{i=1}^L (1 - F_i(y)) = P(Y_i < y), \quad (4)$$

где $F_i(y)$ – закон распределения i -й величины.

Функция распределения времени, оставшегося до наступления очередного события (после случайного попадания точки в произвольный интервал между последовательными наступлениями событий) в потоке Эрланга порядка k_i имеет вид [9]:

$$F_{r_i}(t) = 1 - \frac{1}{k_i} \sum_{n=0}^{k_i-1} R(n, \lambda_i t). \quad (5)$$

Тогда функция распределения минимальной из L случайных величин определяется по формуле

$$F_{r^{(L)}}(t) = 1 - \prod_{i=1}^L (1 - F_{r_i}(t)) = 1 - \prod_{i=1}^L \left(\frac{1}{k_i} \sum_{n=0}^{k_i-1} R(n, \lambda_i t) \right). \quad (6)$$

А ее плотность распределения $f_{r^{(s)}}(t)$:

$$\begin{aligned} f_{r^{(s)}}(t) &= \left(F_{r^{(s)}}(t) \right)'_t = \left(1 - \prod_{i=1}^s \left(\frac{1}{k_i} \sum_{n=0}^{k_i-1} R(n, \lambda_i t) \right) \right)'_t = \\ &= - \left(\prod_{i=1}^s \left(\frac{1}{k_i} \sum_{n=0}^{k_i-1} \left((\lambda_i t)^n e^{-\lambda_i t} \right) / k_i! \right) \right)'_t = - \left(\prod_{i=1}^s \left(\frac{1}{k_i \cdot k_i!} \sum_{n=0}^{k_i-1} (\lambda_i t)^n e^{-\lambda_i t} \right) \right)'_t. \end{aligned} \quad (7)$$

Вероятность того, что за время T^{**} во всех L потоках не произойдет ни одно событие:

$$P^{(L)}(T > T^{**}) = 1 - F_{r^{(L)}}(t). \quad (8)$$

Теперь определим среднее значение $\bar{M}_L$ минимальной из L случайных величин $R^{(L)} = \min\{R_1, R_2, \dots, R_L\}$. При вычислении интеграла воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \bar{M}_L &= \int_0^\infty t \cdot f_{r^{(s)}}(t) dt = \int_0^\infty t \cdot \left(- \prod_{i=1}^s \left(\frac{1}{k_i \cdot k_i!} \sum_{n=0}^{k_i-1} (\lambda_i t)^n e^{-\lambda_i t} \right) \right)'_t dt = \\ &= \int_0^\infty \left(\prod_{i=1}^s \left(\frac{1}{k_i \cdot k_i!} \sum_{n=0}^{k_i-1} (\lambda_i t)^n e^{-\lambda_i t} \right) \right) dt - \left(t \cdot \prod_{i=1}^s \left(\frac{1}{k_i \cdot k_i!} \sum_{n=0}^{k_i-1} (\lambda_i t)^n e^{-\lambda_i t} \right) \right) \Big|_0^\infty. \end{aligned} \quad (9)$$

В частности, найдем математическое ожидание случайной величины $R^{(2)} = \min\{R_1, R_2\}$:

$$\begin{aligned} \bar{M}_2 &= \int_0^\infty \left(\prod_{i=1}^2 \left(\frac{1}{k_i \cdot k_i!} \sum_{n=0}^{k_i-1} (\lambda_i t)^n e^{-\lambda_i t} \right) \right) dt - \left(t \cdot \prod_{i=1}^2 \left(\frac{1}{k_i \cdot k_i!} \sum_{n=0}^{k_i-1} (\lambda_i t)^n e^{-\lambda_i t} \right) \right) \Big|_0^\infty = \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{k_1 \cdot k_1!} \sum_{n=0}^{k_1-1} (\lambda_1 t)^n e^{-\lambda_1 t} \right) \cdot \left(\frac{1}{k_2 \cdot k_2!} \sum_{n=0}^{k_2-1} (\lambda_2 t)^n e^{-\lambda_2 t} \right) dt - \\ &- \left(t \cdot \left(\frac{1}{k_1 \cdot k_1!} \sum_{n=0}^{k_1-1} (\lambda_1 t)^n e^{-\lambda_1 t} \right) \cdot \left(\frac{1}{k_2 \cdot k_2!} \sum_{n=0}^{k_2-1} (\lambda_2 t)^n e^{-\lambda_2 t} \right) \right) \Big|_0^\infty = \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{k_1 \cdot k_1!} \sum_{n=0}^{k_1-1} (\lambda_1 t)^n e^{-\lambda_1 t} \right) \cdot \left(\frac{1}{k_2 \cdot k_2!} \sum_{n=0}^{k_2-1} (\lambda_2 t)^n e^{-\lambda_2 t} \right) dt \\ \bar{M}_2 &= \frac{1}{k_1 \cdot k_1!} \cdot \frac{1}{k_2 \cdot k_2!} \cdot \int_0^\infty e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \left(\sum_{n=0}^{k_1-1} (\lambda_1 t)^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{k_2-1} (\lambda_2 t)^n \right) dt. \end{aligned} \quad (10)$$

При вычислении интеграла мы учли формулу интегрирования по частям, а при вычислении предела воспользовались арифметическими свойствами пределов функций и тем, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P_m(t)}{e^{\lambda t}} = 0$, где $\lambda > 0$, $P_m(t)$ – многочлен.

Обозначим $P_m(t) = \left(\sum_{n=0}^{k_1-1} (\lambda_1 t)^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{k_2-1} (\lambda_2 t)^n \right)$ – многочлен степени $m = (k_1 - 1) + (k_2 - 1)$ переменной t . В общем случае будем считать $P_m(t) = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \dots + a_0$ и рассмотрим неопределенный интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \cdot P_m(t) dt &= -\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \int_0^{\infty} P_m(t) d e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} = \\ &= -\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(\frac{P_m(t)}{e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}} \right) \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} (P_m(t))' dt = \\ &= -\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} (0 - a_0) + \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} (P_m(t))' dt = \\ &= \frac{a_0}{\lambda_1 + \lambda_2} - \left(\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^2 \cdot \int_0^{\infty} (P_m(t))' d e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}. \end{aligned} \quad (11)$$

В многочлене $(P_m(t))' = m a_m t^{m-1} + (m-1) a_{m-1} t^{m-2} + \dots + 1 \cdot a_1$ свободный член равен $1 \cdot a_1 = 1! \cdot a_1$. В многочлене $(P_m(t))'' = m(m-1) a_m t^{m-2} + (m-1)(m-2) a_{m-1} t^{m-3} + \dots + 2 \cdot 1 \cdot a_2$ свободный член равен $2 \cdot 1 \cdot a_2 = 2! \cdot a_2$. И так далее рассуждая, по индукции получим, что в многочлене $(P_m(t))^{(s)}$ свободный член $s! \cdot a_s$.

Продолжим вычислять интеграл, учитывая при вычислении пределов следующее:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(P_m(t))^{(s)}}{e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(P_m(t))^{(s)}}{e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}} = \frac{s! \cdot a_s}{1}. \quad (12)$$

Получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \cdot P_m(t) dt &= \frac{a_0}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{1! a_1}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2} + \frac{2! a_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^3} + \dots + \frac{m! a_m}{(\lambda_1 + \lambda_2)^{m+1}}, \\ \bar{M}_2 &= \frac{1}{k_1 \cdot k_1!} \cdot \frac{1}{k_2 \cdot k_2!} \cdot \left(\frac{a_0}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{1! a_1}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2} + \frac{2! a_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^3} + \dots + \frac{m! a_m}{(\lambda_1 + \lambda_2)^{m+1}} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

4. Показатели для частных случаев распределений пешеходных потоков

Пусть к переходу с двух сторон стекают два пешеходных потока. Используя выведенные формулы (6), (7), (10) и (13), получим результаты для наиболее часто встречающихся на практике частных случаев:

1) оба потока кластеров пешеходов распределены по показательным законам с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно (то есть $k_1 = k_2 = 1$):

$F_{r(2)}(t) = 1 - (e^{-\lambda_1 t}) (e^{-\lambda_2 t}) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$ – интегральная функция распределения интервалов $R^{(2)}$ между двумя последовательными прибытиями пешеходов к перекрестку (безразлично, в каком направлении);

$f_{r(2)}(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$ – плотность распределения величины $R^{(2)}$;

$$\bar{M}_2 = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} - \text{математическое ожидание величины } R^{(2)}.$$

2) оба потока кластеров пешеходов распределены по закону Эрланга с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно и $k_1 = k_2 = 1$:

$$F_{r^{(2)}}(t) = 1 - \left(\frac{1}{2 \cdot 2!} \right)^2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \left((\lambda_1 \lambda_2) t^2 + (\lambda_1 + \lambda_2) t + 1 \right) - \text{интегральная функция рас-}$$

пределения величины $R^{(2)}$;

$$f_{r^{(2)}}(t) = - \left(\frac{1}{2 \cdot 2!} \right)^2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \left(-(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 \lambda_2) t^2 + \left(-(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 \right) t \right) - \text{плотность}$$

распределения величины $R^{(2)}$;

$$\bar{M}_2 = \left(\frac{1}{2 \cdot 2!} \right)^2 \frac{2\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2} - \text{математическое ожидание величины } R^{(2)}.$$

Заключение

В данной статье разработан алгоритм автоматизированного разбиения пешеходов в потоке на кластеры и метод определения параметров случайного потока в этом случае. Аналитический аппарат, полученный в пунктах 3 и 4, позволяет определять параметры пешеходных потоков, прибывающих к пешеходному переходу. Причем результат получается в режиме реального времени, что позволяет применять модель в интеллектуальных транспортных системах.

Список литературы

1. Helbing D., Molnar P. Social force model for pedestrian dynamics. «Physical Review E». 1995. No. 51 (5). P. 4282–4286.
2. Johansson F. Microscopic Modelling and Simulation of Pedestrian Traffic. Lincoping University Department of Science and Technology. Lincoping, Sweden. 2013. P. 119.

3. Burger M., Hittmeir S., Ranetbauer H., Wolfram M.T. Lane formation by side-stepping. SIAM Journal on Mathematical Analysis. 2016. No. 48 (2). P. 981–1005.

4. Emiliano Cristiani, Benedetto Piccoli, Andrea Tosin. Multiscale modeling of granular flows with application to crowd dynamics. Multiscale Modeling & Simulation. 2011. No. 9 (1). P. 155–182.

5. Carrillo J.A., Martin S., Wolfram M.T. An improved version of the Hughes model for pedestrian flow. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2016. No. 26 (04). P. 671–697.

6. Naumova N.A. Advanced optimization of road network: Pedestrian crossings with calling devices. International Journal of Emerging Trends in Engineering Research. 2020. No. 8 (1). P. 130–137.

7. Naumova N.A., Naumov R.A., Method of Solving Some Optimization Problems for Dynamic Traffic Flow Distribution. International Review on Modelling and Simulations. Italy. 2018. Vol. 11. No 4.

8. Cox D.R. Renewal theory. London: Methuen, 1962. P. 150.

9. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения : учеб. пособие для вузов. М.: Высш. шк., 2000. 480 с.