УДК 378.147.88:517.938

**О КОМПЬЮТЕРНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ
С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ НА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ****Морозов А.В.***ФГКОУ ВПО «Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского», Санкт-Петербург,
e-mail: alex.morozof@gmail.com*

Исследование автономных нелинейных колебательных систем с одной степенью свободы на фазовой плоскости является одним из распространенных методов теории колебаний и широко используется в инженерной практике и научных исследованиях. Фазовые картины часто оказываются настолько информативными, что в построении точных или приближенных решений необходимость отпадает. Кроме того, подробный фазовый портрет отражает многие особенности поведения системы и всю совокупность движений в зависимости от начальных состояний физической системы. Теоретической базой исследования динамических систем на плоскости служит качественная теория дифференциальных уравнений и теория бифуркаций. С появлением персональных компьютеров и современных компьютерных систем процесс исследования сложных моделей стал носить качественно-численный характер. В настоящей статье, носящей методологический характер, обсуждаются лабораторные работы по тематике дисциплины математические основы теории систем, которая читается в ряде вузов страны. Проведение таких работ должно вырабатывать у студентов комплексные навыки исследовательской работы с освоением методов и приемов качественно-численного исследования динамических систем. Изучение таких систем должно способствовать развитию интеллекта, креативности и формированию профессиональных компетенций обучаемых. В целом проведение лабораторных работ должно повысить мотивацию к научно-исследовательской деятельности наиболее активной части студенческой аудитории. Целью статьи является обмен опытом проведения занятий по указанной дисциплине с использованием пакета прикладных программ WinSet, а также повышение компетентности преподавателей технических кафедр вузов.

Ключевые слова: динамическая система на плоскости, фазовые портреты нелинейных систем, качественно-численное исследование

**THE MODELING OF VIBRATING SYSTEMS WITH ONE DEGREE
OF FREEDOM ON THE PHASE PLANE****Morozov A.V.***Federal State Military Educational Institution of Higher Professional Education
«Military space Academy named after A.F. Mozhaysky», Saint-Petersburg, e-mail: alex.morozof@gmail.com*

The study of Autonomous nonlinear oscillatory systems with one degree of freedom on the phase plane is one of the most common methods of oscillation theory and is widely used in engineering practice and research. Phase pictures are often so informative that there is no need to build accurate or approximate solutions. In addition, a detailed phase portrait reflects many features of the behavior of the system and the whole set of movements depending on the initial States of the physical system. The theoretical basis for the study of dynamic systems on the plane is the qualitative theory of differential equations and the theory of bifurcations. With the advent of personal computers and modern computer systems, the process of studying complex models began to be of a qualitative and numerical nature. In this article, which is methodological in nature, discusses laboratory work on the subject of discipline mathematical foundations of the theory of systems, which is read in a number of universities in the country. Carrying out such works should develop students' comprehensive research skills with the development of methods and techniques of qualitative and numerical study of dynamic systems. The study of such systems should contribute to the development of intelligence, creativity and the formation of professional competencies of students. In General, laboratory work should increase the motivation for research activities of the most active part of the student audience. The purpose of the article is to exchange experience in conducting classes in this discipline using the package of WinSet applications, as well as improving the competence of teachers of technical departments of universities.

Keywords: dynamic system on the plane, phase portraits of nonlinear systems, qualitative and numerical study

В последние годы в кругах педагогической общественности высшей школы много говорится о возросшей роли самостоятельной работы студентов и ее значении для формирования компетенций будущего специалиста. Одной из форм самостоятельной работы являются лабораторные работы. На наш взгляд, количество лабораторных работ в целом в высшей школе надо увеличивать. Особенно их постановка важна в наукоемких дисциплинах: физике, математике, информатике и др. Проведение лабораторных

работ по курсу теории систем также актуально и целесообразно, ибо здесь присутствует комплексность формируемых знаний и можно четко выделить этапы: 1) физического и математического моделирования; 2) выбора метода исследования; 3) исследования математической модели аналитическим методом; 4) численного решения задачи с использованием ПК и визуализации результатов; 5) анализа полученных результатов.

На кафедре информационных систем и вычислительной техники Санкт-

Петербургского горного университета с 2003 г. читается курс математических основ теории систем (кратко «МОТС»). Видное место в нём занимает анализ нелинейных автономных и неавтономных динамических систем второго порядка в фазовом пространстве, описываемых дифференциальными уравнениями как аналитическими, так и численными методами. В нём студенты знакомятся со способами описания динамических систем, их классификацией, с элементами качественной (геометрической) теории дифференциальных уравнений на плоскости и пространстве, с основными понятиями и теоремами теории устойчивости, с дискретными отображениями и различными приложениями этой теории. В курсе много конкретных примеров из механики, электротехники и электроники, гидродинамики, химии, математической теории популяции [1]. Важное место в нём занимают вопросы связи возможных структур фазовых картин динамических систем от параметров. Ответы на эти вопросы содержатся в теории бифуркаций, основателем которой является А. Пуанкаре. Теория бифуркаций, отражающая закон перехода количества в качество, является важной составляющей активно развивающейся сегодня нелинейной динамики – теоретического фундамента целого ряда научных и технических дисциплин. В курсе изучаются элементарные бифуркации в динамических системах на прямой и плоскости. Демонстрируются примеры. Курс предусматривает выполнение студентами ряда лабораторных работ [1], целью проведения которых является закрепление основных положений теории через визуализацию геометрических образов и выработка у студентов определенных навыков исследовательской работы с освоением приемов качественно-численного исследования динамических систем. Выполнение каждого задания в лабораторных работах подразумевает выполнение студентом некоторой теоретической части, включающей этапы, изложенные на лекциях, и вычислительной, включающей проведение ряда целенаправленных вычислительных экспериментов с использованием какой-либо из известных компьютерных систем. В качестве вычислительного инструмента с 2010 г. студенты используют программный комплекс WinSet [2], который в настоящее время приобрел достаточную известность и апробирован во многих вузах страны. Для целей нашего курса WinSet обладает рядом преимуществ в сравнении с программными пакетами MATLAB, MAPLE, Scilab и др., так как имеет удобный

интерфейс, прост в использовании и, что немаловажно, – не требует большого времени на изучение. Заметим, что введение в учебный процесс компьютерных методов исследования математических моделей является велением времени и должно стимулировать интерес студентов к изучению аналитических методов, к каковым относятся методы качественной теории дифференциальных уравнений и теории бифуркаций. Результатом проведения обсуждаемых в настоящей статье лабораторных работ должно стать формирование у студента преобразовательной, инновационной и творческой активности. Далее мы приводим несколько типовых лабораторных работ. При желании спектр рассматриваемых в них математических моделей можно расширить в соответствии с будущей специальностью студента.

Лабораторные работы

Первая лабораторная работа по существу является ознакомительной. Во вступительной части преподаватель демонстрирует возможности программы WinSet, приёмы работы с ней и визуализирует некоторые наиболее важные положения теории, изложенной на лекциях [1]. Затем студенты знакомятся с программой самостоятельно на примере качественно-численного исследования линейной системы дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x} = p_1x + p_2y, \\ \dot{y} = p_3x + p_4y. \end{cases}$$

В каждом варианте индивидуальных заданий фиксируются три из четырёх параметров p_1, p_2, p_3, p_4 . Требуется: 1) провести теоретический анализ системы по оставшемуся параметру с классификацией всех возможных типов состояний равновесия, включая вырожденные случаи; 2) используя программу WinSet, построить соответствующие фазовые картины. Так, для системы [3]

$$\begin{cases} \dot{x} = p_1x + 12y, \\ \dot{y} = -2x + 3y, \end{cases}$$

в результате анализа корней характеристического уравнения

$$\lambda^2 - (3 + p_1)\lambda + 3p_1 + 24 = 0$$

студент должен построить следующую таблицу (таблица), а затем приложить 9 фазовых картин. На рис. 1 мы приводим для примера четыре из них, соответствующие номерам 1, 5, 6, 9 таблицы.

№	p_1	Характеристические корни	Тип положения равновесия
1	$p_1 < -8$	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$	Седло
2	$p_1 = -8$	$\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0$	Вырожденный случай
3	$-8 < p_1 < 3 - 4\sqrt{6}$	$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$	Устойчивый узел
4	$p_1 = 3 - 4\sqrt{6}$	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Вырожденный устойчивый узел
5	$3 - 4\sqrt{6} < p_1 < -3$	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i < 0 (\alpha < 0)$	Устойчивый фокус
6	$p_1 = -3$	$\lambda_{1,2} = \pm \beta i$	Центр
7	$-3 < p_1 < 3 + 4\sqrt{6}$	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i < 0 (\alpha > 0)$	Неустойчивый фокус
8	$p_1 = 3 + 4\sqrt{6}$	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Вырожденный неустойчивый фокус
9	$p_1 > 3 + 4\sqrt{6}$	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$	Неустойчивый узел

а)

б)

в)

г)

Рис. 1. Фазовые портреты линейных систем:
 а) седло; б) устойчивый фокус; в) центр; г) неустойчивый узел

Рис. 2. Типовые фазовые картины:
а), б) консервативные системы; в), г) диссипативные системы

В следующей лабораторной работе исследуются эталонные динамические системы, играющие в теории колебаний большую феноменологическую роль

$$\ddot{x} + p_1 \dot{x} + p_2 x + p_3 x^2 + p_4 x^3 = 0,$$

$$\ddot{x} + p_1 \dot{x} + p_2 \sin x = 0,$$

$$\ddot{x} + p_1 (p_2 x^2 - 1) \dot{x} + p_3 x = 0,$$

(это уравнения Дуффинга, математического маятника и автогенератора Ван дер Поля). Здесь студенты определяют состояния равновесия, проводят линеаризацию уравнений в них, устанавливают типы состояний равновесия, в случае $p_1 = 0$ находят первые интегралы уравнений и строят инвариантные кривые. Далее проводят анализ векторного поля систем по параметру p_1 . На втором этапе, используя программу Winset, студенты строят фазовые портреты консервативных ($p_1 = 0$) и диссипативных ($p_1 > 0$)

систем, моделируют сепаратрисы седловых состояний равновесия и анализируют зависимость формы предельных циклов в уравнении Ван дер Поля от параметров (рис. 2, 3).

Рис. 3. Предельный цикл уравнения автогенератора Ван дер Поля

Третья лабораторная работа относится к исследованию бифуркаций в нелинейной системе с параметром p_1

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, p_1), \\ \dot{y} = g(x, y, p_1). \end{cases}$$

Функции $f(x, y, p_1)$, $g(x, y, p_1)$ задаются индивидуально в каждом варианте.

Рассмотрим конкретный пример такого задания [4].

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2, \\ \dot{y} = x + y + p_1 \end{cases}$$

и кратко сформулируем результаты качественно-численного исследования, которые должен получить студент:

1. При $|p_1| > 2$ положений равновесия в системе нет.
2. При $p_1 = 2$ и $p_1 = -2$ возникает бифуркация седло-узла.
3. При $p_1 = 1,743$ происходит бифуркация петли сепаратрисы седла (бифуркация гомоклинической траектории).
4. При переходе через критическое значение $p_1 = 1,743$ из петли сепаратрисы рождается устойчивый предельный цикл.
5. При $p_1 = 1,8228$ возникает обратная бифуркация Андронова – Хопфа (устойчивый цикл «влипает» в неустойчивое положение равновесия и передаёт ему свою устойчивость). Важно, что область $p_1 \in (1,743, 1,8228)$ отвечает существованию устойчивого предельного цикла. На рис. 4 для $p_1 = 1,78$ приведена фазовая картина (в положении равновесия C_1 – седло, в C_2 – неустойчивый фокус). Другие фазовые картины мы здесь не приводим.

Рис. 4. Седло и устойчивый цикл при $p_1 = 1,78$

Выполнение работы, возможно, потребует от студента самостоятельного изучения ряда дополнительных теоретических вопросов, связанных с теорией бифуркаций [5–7]. На этом этапе определенную помощь должен оказать преподаватель.

Следующая лабораторная работа является наиболее емкой в вычислительном плане. Она знакомит студента со сложным динамическим поведением в простых нелинейных системах. Работа требует большой работы за компьютером и для ее полного выполнения будет нужна внеаудиторная работа (работа дома). Отчетом должна стать карта динамических режимов конкретного нелинейного осциллятора с внешним воздействием. Примерным вариантом такой работы может служить система [1]:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -\gamma x_2 - x_1^3 + A \sin \omega t. \end{cases}$$

В ней фиксируются два параметра γ и ω и требуется исследовать динамику системы в заданном интервале изменения третьего параметра $A \in [\alpha, \beta]$. При выполнении такой работы вполне допустимым будет консультирование студента по электронной почте, так как вопросов может быть много. Отметим, что эта работа знакомит студента с постановкой современных и сложных задач. Экспериментальное решение подобных задач сводится, по существу, к длительному вычислительному эксперименту и может затянуться на многие часы, а студент «незаметно для себя» окажется втянутым в научное исследование. Заметим, что теоретическое исследование этой системы представляет собой трудную математическую задачу не только для студента, но и для состоявшегося математика.

Заключение

Предлагаемые в статье темы лабораторных работ носят в значительной степени междисциплинарный учебный характер и могут проводиться не только по дисциплине МОТС. Много полезного в них найдут преподаватели кафедр математики, физики, информатики, радиотехники и электроники, а также других дисциплин. Рассмотренные в лабораторных работах математические модели непринципиальны. Много интересных примеров сегодня дает химия, биология, экономика. Работы носят комплексный характер и включают элементы качественной теории и теории бифуркаций (на наш взгляд, сегодня они

слабо отражены в учебных программах технических вузов), теории нелинейных колебаний, а также компьютерную технологию работы с новым программным продуктом. Такой подход оправдан целью формирования профессиональной компетентности специалиста широкого инженерного профиля и креативности его мышления. Преподавателям высшей технической школы хорошо знакома проблема разрыва между уровнем преподавания дифференциальных уравнений и уровнем современной математической науки. К сожалению, в ряде вузов страны теория дифференциальных уравнений, являющаяся фундаментом многих научных и технических дисциплин, излагается в объеме, включающем классические результаты, полученные еще к середине XIX в., а примеры, рассматриваемые в них, носят модельный – оторванный от приложений характер. Темы обсуждаемых лабораторных работ конкретны (физическую сущность приведенных моделей мы здесь не обсуждали) и должны послужить активизации познавательной деятельности студента, пробудить в нем интерес не только к абстрактной теории систем, но и к ее огромным приложениям в науке и технике, а также в целом повысить мотивацию обучающихся к научно-исследовательской работе. Эти знания студентам явно пригодятся. С методической точки зрения работы построены по естественному принципу и ведут студента от понимания простых вещей к пониманию сложных и важных [10], вселяя в него постепенно уверенность в своих силах. Сегодня абсолютно ясно, что необходимо учить не рецептам решения задач, не пустому заучиванию алгоритмов и схем, а исследованию. Хорошо известен тезис, что нельзя научиться думать, если не думать самому. Действовать по шаблону, конечно, проще, но, к сожалению, это скучно. Потеря же интереса к предмету у обучаемого говорит о двух вещах: либо он не туда попал, но мы это не обсуждаем, либо об ошибке преподавателя – не смог заинтересовать предметом. Ставя эти работы, мы реализовали

системно-деятельный подход и преследовали цель пробудить интерес к фундаментальным знаниям через вычислительный эксперимент, компьютерное моделирование, так как наглядные образы всегда являлись стимулами к познанию нового (полезно напомнить, что там, где в науке можно что-то нарисовать – надо рисовать). При проведении лабораторных работ, как хорошо известно, активность преподавателя уступает место активности студента. Задача педагога заключается в создании благоприятных условий для инициативы студента и «легком адаптивном управлении». При этом студент становится центральной фигурой учебного процесса, а педагог переходит в ранг консультанта и товарища. Сказанное является в настоящее время азбучной истиной, но напомнить ее все-таки следует.

Список литературы

1. Морозов А.В. Качественная теория дифференциальных уравнений – основная составляющая теории динамических систем // Труды Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского. 2014. Вып. 642. С. 177–184.
2. Морозов А.Д. Математические методы теории колебаний. Издательство «ИКИ», 2017. 144 с.
3. Булекбаев Д.А., Катранов А.Г., Морозов А.В. Формирование компетенций в курсе математики // Труды Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского. 2015. Вып. 648. С. 192–201.
4. Булекбаев Д.А., Морозов А.В. Исследование динамических систем в WinSet // Математика в вузе и школе: тр. Национальной научно-методической конференции. Санкт-Петербург, сентябрь – октябрь 2017 г. / Под ред. В.Г. Дегтярева. СПб.: ФГБОУ ВО ПГУПС, 2017. С. 74–77.
5. Треногин В.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 312 с.
6. Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: МЦНМО, 2012. 304 с.
7. Аносов Д.В. Дифференциальные уравнения: то решаем, то рисуем. М.: МЦНМО, 2010. 200 с.
8. Хакен Г. Синергетика: Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах: пер. с англ. М.: Мир, 1985. 419 с.
9. Ueda Y. Steady Motions Exhibited by Duffing's Equation: A Picture Book of Regular and Chaotic Motions. New Approaches to Nonlinear Problems in Dynamics / Ed. P.J. Holmes. Philadelphia: SIAM, 1980. P. 311–322.
10. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2018. 320 с.