УДК 372.851:378

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИКИ В ВУЗОВСКОМ КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Асанова Ж.К.

Кыргызский государственный университет им. И. Арабаева, Бишкек, e-mail: zhyldyzasanova73@mail.ru

Трудноусвояемой дисциплиной для студентов является высшая математика. Затруднение вызывает математический аппарат, методы исследования, примеры решения задач, которые не используются в обычной повседневной жизни. Сложно приходится тем, кто, учась в общеобразовательном заведении, по определенным причинам не смог усвоить основы школьного курса математики. Для восстановления упущенных знаний практически не хватает времени в связи с насыщенностью вузовского обучения. В данный момент распространено использование математических методов для решения самых разнообразных технических и технологических задач. Студент должен понять, что и после окончания вуза придется сталкиваться в своей практике задачами, для решения которых ему нужны будут математические знания. Курс математики создает у студента прочные навыки логического мышления, которое необходимо каждому специалисту. Развитие математики показывает, что оперирование с понятиями множество, отображение, преобразование, числа, функции, алгебраическая операция, логическими понятиями (высказывание, предикат) становится необходимостью во всех разделах математики и ее приложений. Язык математической логики, являясь математическим языком любой области познания, становится необходимым средством овладения многими разделами современной математики и ее приложений.

Ключевые слова: математика, высшая математика, комплексные числа, натуральные числа, функция, отображение, множества, интервал, сегмент, соответствия, область, дифференциальные уравнения

BASIC CONCEPTS OF MATHEMATICS IN THE UNIVERSITY COURSE OF HIGHER MATHEMATICS

Asanova Zh.K.

Kyrgyz State University named after I. Arabaev, Bishkek, e-mail: zhyldyzasanova73@mail.ru

Higher mathematics among students is traditionally considered one of the most difficult disciplines for mastering. Complexity is mainly connected with the use of the mathematical apparatus, methods of research, methods of solving problems that go far beyond the descriptions adopted and applied in the usual, «intangible» life. Particularly difficult is for those who, while studying in secondary school, for some reason missed the basics of the concepts of elementary mathematics used there. The intensive program of university education practically leaves very little time to restore the existing gaps. At present, mathematical methods are widely used to solve a wide variety of technical and technological problems. Therefore, the student must foresee that even after graduation, he will often face the need to apply his mathematical knowledge in practical activities. The course of mathematics is designed to create in the student strong skills of logical thinking, so necessary for each specialist. The development of mathematics shows that operating with the concepts of set, mapping, transformation, numbers, functions, algebraic operations, logical concepts (utterance, predicate) becomes a necessity in all sections of mathematics and its applications. The language of mathematical logic, being the mathematical language of any field of knowledge, becomes a necessary means of mastering many branches of modern mathematics and its applications.

Keywords: Mathematics, higher mathematics, complex numbers, natural numbers, function, mapping, sets, interval, segment, correspondences, domain, differential equations

Общая трудоемкость освоения ООП подготовки бакалавров на базе среднего общего или среднего профессионального образования при очной форме обучения составляет 360 кредитов и на базе высшего профессионального образования, подтвержденного присвоением академической степени «магистр», составляет 120 кредитов.

Трудоемкость ООП ВПО по очной форме обучения за учебный год равна 60 кредитам.

В части учебного плана бакалавриата по направлению 550000 «Педагогическое образование» профиль подготовки «Математика», «Физика», «Информатика» курс «Высшая математика» (Математика) проводится в первом курсе и на него отведено 2 кредита. 50% выделенных кредитов-часов предусмотрено для самостоятельной работы студентов. В отличие от этого, аудиторные кредитные часы для уроков в форме лекции и практики в учебно-рабочей программе предусмотрены как соотношение 55/45, и эти кредитные часы распределены на 1 семестр. Другими словами, из этих 2 кредитов 30 часов составляют, а 30 часов самостоятельной работы студентов.

Математика является фундаментальной наукой, поскольку её основа носит общенаучный характер и применяется в других науках и видах деятельности. Знания по математике, которые приобретаются студентами при изучении настоящего курса, сыграют в будущем важную роль в процессе их дальнейшего обучения. Знания пригодятся им для успешного изучения общетеоретических и специальных предметов по направлению [1].

Основы математической науки студентам открываются при изучении курса высшей математики. Студент может далее совершенствовать и расширять свои знания, в результате чего открывается возможность изучения близких к своей специальности математические работы отечественных и зарубежных специалистов и использования их результатов в своей практической деятельности [2].

Современный период развития математики показывает, что оперирование с понятиями множество, отображение, преобразование, числа, функции, алгебраическая операция, логическими понятиями (высказывание, предикат) становится необходимостью во всех разделах математики и ее приложений. Язык математической логики, являясь математическим языком любой области познания, становится необходимым средством овладения многими разделами современной математики и ее приложений.

Вопрос о месте и характере введения этих основных понятий в курсе математики в высшем учебном заведении представляет интерес. Должная разработка этого вопроса может способствовать повышению уровня математической подготовки будущих специалистов. Знакомство с основными понятиями на первых лекциях курса высшей математики в высшем учебном заведении диктуется следующими соображениями.

В настоящее время в курсе школьной математики многие из названных понятий в какой-то мере рассматриваются; есть тенденция к более систематическому их изучению. При изучении векторов на плоскости также обращает внимание учащихся на определение операций во множестве векторов и на аналогию этих операций с операциями во множестве чисел. Так что выпускник школы подготовлен к разбору и усвоению понятия алгебраической операции.

Понятия функции, можно сказать, одно из основных понятий школьной математики. На изучение некоторых классов функций (линейных, квадратичных, степенных, показательных, логарифмических, тригонометрических) расходуется большая часть учебного времени в старших классах школы. Следовательно, у выпускника школы есть богатый фактический материал для обобщения, понятие функции и рассмотрение ее, как частного случая отображения одного множества в другое [3].

В школьной геометрии изучаются некоторые классы преобразований фигур, немало времени уделяется изучению параллельного переноса, преобразований геометрии, подобия, симметрии. Все это неплохая база для понимания определения преобразования как частного случая более общего понятия отображения.

Таким образом, таких понятий, как понятие множества, отображения, преобразования, числа, функции, алгебраической операции и так далее.

Все названные понятия явно или неявно входят в курс математики в высшем учебном заведении, но определению некоторых из них не уделяется должного внимания. Возьмем, к примеру, понятие множество. Обычно все преподаватели высшего учебного заведения в своих лекциях или на практических занятиях используют понятие множество; так, например, говорят о множестве корней уравнения, которые приходится вычислять при отыскании стационарных точек данной функции или при решении характеристического уравнения для линейного дифференциального уравнения [4]. Можно привести целый ряд других вопросов, где понятие множества стало систематическим (определение сегмента, интервала, как множеств действительных чисел, удовлетворяющих известным неравенствам, определение границы плоской области и т.д.).

Простейшая теоретика – множественная терминология практически также используется всеми. Так, мы говорим о действительном числе, взятом из данного интервала или сегмента, о точке принадлежавшей некоторой области определения функции одной, двух или n переменных. При определении области существования функций, заданной аналитически, фактически все используется понятиями объединения и пересечения числовых множеств.

В первом семестре в высшем учебном заведении изучаются элементы векторной и линейной алгебры. Здесь сразу вводятся операции сложение векторов, сложение и умножение матриц. При введении их не всегда обращается должное внимание на обобщение понятия арифметической операции. По этой причине нередки случаи, когда студенты не понимают смысла операций над матрицами, не уясняют отличие и аналогию между операциями сложения и умножения над числами и матрицами.

Введение понятия алгебраической операции над элементами произвольного множества позволяет изучающему лучше понять смысл операций, вводимых в векторной и линейной алгебре.

Понятие функции является центральным понятием высшей математики. Изучение свойств различных классов элементарных и не элементарных функций, изучение операторов над ними составляет основное содержание этого курса. Практика показывает, что понятие функции, несмотря на такое внимание к нему, до конца многими изучающими не осознается.

Это легко обнаруживается, когда встает вопрос об определении функции, заданной неявным и параметрическим способами, обратной и сложной функции, функции, заданной не одним аналитическим выражением. Не всегда понятие функции связывается у изучающего с необходимостью вместе с функцией рассматривать ее область определения.

Вряд ли могли возникнуть такие трудности, если определение функции было рассмотрено как частный случай отображения одного множества в другое. Это дало бы возможность более сложное понятие функции определить на основе более элементарного понятия отображения.

Операторы над функциями систематически вводятся и изучаются в курсе высшей математики, например, оператор дифференцирования, интегрирования, линейный дифференциальный оператор, оператор Гамильтона, Лапласа, Фурье и т.д. Вместе с тем не обращается внимание на связь понятия оператора с понятием отображения, преобразования, операции, что могло бы очень помочь раскрытию смысла указанных операторов. При изучении дифференцирования и интегрирования функции нередко даже не подчеркивается их операторный характер [5].

Таким образом, понятия отображения, преобразования, числа, функции, операции по необходимости вводятся в различных разделах курса высшей математики, изучается и используется для решения теоретических и практических вопросов. Такое введение рассмотрение этих понятий не способствует глубокому пониманию и осмысливанию их, не дает возможности усмотреть связи, существующие между ними.

Введение основных понятий математической логики (высказывание, предикат, логические операции) позволяет использовать эти понятия для более краткой и ясной формулировки некоторых утверждений и определений математики, для более четкого понимания таких распространенных понятий, как необходимое и достаточное условия, следствие, доказательство по методу индукции, косвенное доказательство и т.д.

Можно рекомендовать следующий характер введения основных математических понятий, первые три-четыре лекции курса посвятить введению понятий [2]:

1) множество, подмножества;
2) множество действительных чисел и его подмножества;
3) числовая прямая и множество действительных чисел;
4) отображение множества в другое множество, оператор, преобразование;
5) функции и ее график;
6) алгебраическая операция;
7) высказывания, предикаты и логические операции.

Сделаем несколько замечаний по поводу изложения каждого пункта приведенной выше программы.

1. Понятие множества вводится на основе рассмотрения большого числа примеров.

Вводят понятия элемента множества, подмножества конечного и бесконечного множества, знаки принадлежности, включения, пустого множества и рассматриваются операции объединения, пересечения и дополнения множества.

2. Введение множества действительных чисел в этих лекциях есть простое обобщение и повторение известного из программы средней школы понятия расширения множества натуральных чисел, до множества действительных чисел. Напоминаются определения простейших числовых множеств (интервал, сегмент, полуинтервал), при этом используется теоретико-множественными обозначениями, введенными выше.

3. Обычным образом определяются понятие отображения одного множества M в другое множество N.

Подчеркивается, что для определения отображения необходимо указать:

а) закон соответствия;
б) область определения (множество M);
в) однозначность.

Вводятся понятия образа элемента, прообраза, области значений данного отображения, высказываются различными между понятиями отображения множество M в N и на N. Все эти понятия разъясняются на основе примеров отображения, взятых из школьной математики. Как частный случай отображения рассматриваются понятия преобразования, оператора, взаимно однозначного отображения одного множества на другое. Водится понятие обратного отображения f^1 для данного взаимно однозначного отображения f множества M на N.

4. Понятие функции одной переменной $y = f(x)$ с областью определение M вводится как частный случай отображения множества M, являющегося подмножеством множества действительных чисел D во множество действительных чисел. Такое общее определения понятия функции

позволяет изучающему нагляднее увидеть основную сущность понятия функции и тогда более понятными становятся все возможные модификации определения функции, которыми приходится пользоваться. Нетрудно понять, что с этой точки зрения лучше могут быть уяснены такие трудные на первых порах изучения математики понятия как понятия, обратной функции, функции, заданной неявным и параметрическим способами, понятие сложной функции.

Введение понятия графика функции дает возможность еще раз подчеркнуть основную сущность понятия функции (задание области определения и закона соответствия, определенного этим отображением).

6. Введению понятия алгебраической операции должно быть уделено достаточно внимания. Имеет смысл ввести понятие бинарной и унарной операции как обобщение понятия отображения, а именно как отображения, ставящего любой паре элементов *x*, у некоторого множества *M* (в случае определения бинарной операции).

Материал школьной математики позволяет привести достаточное число примеров алгебраических операций.

7. Высказывания и предикаты вводятся и разъясняются на разборе достаточного числа примеров: при этом большая часть примеров приводятся из материала школьной математики. Логические операции: конъюнкция, дизъюнкция, импликация – вводятся как бинарные алгебраические операции, а отрицание – как унарная алгебраическая операция на множестве всех высказываний, с указанием соответствующих таблиц истинности. Затем эти операции распространяются и на множестве предикатов, для которых вводятся еще две ударные операции (кванторы существования и всеобщности). Символика математической логики на первых порах может быть использована для записи для тех или иных определений курса высшей математики.

В высшем учебном заведении задачи высшей математики могут обучить студентов логически глубоко мыслить, находить нестандартные решения, строить алгоритм решения трудных задач. Для диагностирования у студентов первичных и необходимых знаний по математике им предлагается решение определенных задач, использующих стандартные математические формулы и основные понятия.

Решить математическую задачу − это значит найти такую последовательность общих положений математики, применяя которые к условиям задачи получаем то, что требуется найти – ответ. По учебному плану выделены часы на самостоятельную работу студента. Поэтому для студентов рассмотрим методический прием, который позволит глубоко мыслить, решить трудные задачи по высшей математике: самостоятельные работы учащихся (студентов), решение задач по образцу, групповая самостоятельная работа и т.д.

Студентам предлагается самостоятельная работа под руководством преподавателя, на примере изучения темы «Предел» «Производная», «Дифференциал функции», «Интегралы», которая включает в себя как теоретическую, так и практическую часть. Такая подготовленность дает студентам самостоятельно решить задачу по практике.

В теоретическую часть самостоятельной работы можно включить следующие вопросы:

1. Определение непрерывности функции.
2. Определение предела функции в точке и на бесконечности.
3. Доказать первый замечательный предел.
4. Теорема об эквивалентных функциях.
5. Аппроксимация элементарных функций простейшими многочленами.
6. Геометрический и механический смысл производной.
7. Определить геометрический смысл теоремы Лагранжа.
8. Механический и геометрический смысл определенного интеграла.
9. Каков геометрический смысл теоремы о среднем?
10. Выразить интегральную сумму в виде суммы площадей прямоугольников с равными основаниями.

Вышеуказанные темы студенты могут изучить, используя лекции преподавателя, также изучая дополнительный материал [2].

Рассмотрим предлагаемую задачу, разделив на два уровня.

Самостоятельная работа учащегося (студента). Практическая часть.

Задача 1: Вычислить предел.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{2x^2}}{1+\frac{5}{2x^2}}\right)^{8x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{2x^2}}{1+\frac{5}{2x^2}}\right)^{3}\times\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x^2}\right)^{8x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{2x^2}\right)^{8x^2}}=\frac{e^{\frac{3}{2}\cdot 8}}{e^{\frac{5}{2}\cdot 8}}=e^{-8}.$$

Задача 2: Вычислить интеграл.

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2+2x+2} = t - x \\ x^2+2x+2 = t^2 - 2xt + x^2 \\ x = \dfrac{t^2-2}{2(1+t)} \\ dx = \dfrac{t^2+2t+2}{2(1+t)^2} dt \\ 1+\sqrt{x^2+2x+2} = 1+t-\dfrac{t^2-2}{2(1+t)} = \dfrac{t^2+4t+4}{2(1+t)} \end{array} \right| = \int \frac{2(1+t)(t^2+2t+2)}{2(t^2+4t+4)(1+t)^2} dt =$$

$$= \int \frac{t^2+2t+2}{(1+t)(t+2)^2} dt = \int \frac{A}{1+t} dt + \int \frac{B}{2+t} dt + \int \frac{D}{(2+t)^2} dt,$$

$$\frac{t^2+2t+2}{(1+t)(t+2)^2} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2} + \frac{D}{(t+2)^2} = \frac{A(t+2)^2 + B(t+2)(t+1) + D(t+1)}{(t+1)(t+2)^2}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 4A+3B+D=2 \\ 4A+2B+D=2 \end{cases} \rightarrow \quad A=1, \quad B=0, \quad D=-2$$

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}} = \ln|1+t| + \frac{2}{t+2} + C = \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) +$$

$$+\frac{2}{x+2+\sqrt{x^2+2x+2}} + C.$$

Дано: самостоятельные работы (аналогичные задачи):

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+2x+1}{x^2+x+1}\right)^{\frac{6x+1}{3x-1}}$.

2. $\int \dfrac{dx}{x-\sqrt{x^2+2x+4}}$.

Такие групповые работы для самостоятельного выполнения проверяются и оцениваются консультантом, но можно эти задания давать как самостоятельную домашнюю работу, которая проверяется преподавателем.

На занятии преподаватель обсуждает со студентами выполненную домашнюю работу и студенты работают над ошибками.

Изложение этих основных понятий поможет студенту при изучении всех разделов математики обнаруживать, уяснять и осмысливать их значение.

Список литературы

1. Торогелдиева К.М. Теория и методика обучения математикию. Бишкек, 2008. 324 с.

2. Кутанов А., Алиев Ш., Асанова Ж.К. Высшая математика в упражнениях и задачах. Бишкек, 2008. 174 с.

3. Карабакиров Р.К. Высшая математика. Бишкек, 2012. 212 с.

4. Керимбеков А., Абдылдаева Э. Дифференциальные уравнения (Теория и практика). Бишкек, 2017. 319 с.

5. Великович Л.Л. Единый подход к преподаванию математики в школе и университете // Модернизация математической подготовки в университетах технического профиля: сб. науч. статей Междунар. науч.-практ. конф. Гомель: БелГУТ, 2017. С. 31–34.