УДК 004.942

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЧЕТКИХ ПЕТРОФИЗИЧЕСКИХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

**Кобрунов А.И., Дорогобед А.Н., Кожевникова П.В.**

*ФГБОУ ВО «Ухтинский государственный технический университет», Ухта, e-mail: aira_dark@list.ru*

Петрофизические связи между физико-геологическими параметрами рассматриваются как связи между нечеткими величинами. Таковы базовые свойства результатов реальных экспериментальных петрофизических исследований. Формой их представления служат нечеткие отношения, которые называются нечеткой петрофизической моделью. Петрофизическая модель служит основой для создания технологий прогнозирования физико-геологических параметров, которые в условиях нечетких исходных данных и нечетких петрофизических моделей являются пространственно распределенными нечеткими переменными. Результат прогнозирования – нечеткая физико-геологическая модель является объективным результатом, отражающим реальные свойства и полноту исходных данных и неопределенности в правилах прогнозирования. Конструирование нечеткой петрофизической модели основано на создании функций принадлежности отношений для нечетких отношений на основе реальных данных. Описываются методы их построения. Для конструирования функций принадлежности используется экспоненциальный закон как имеющий максимальную энтропию и в большей степени освобожденный от субъективного упорядочения данных. Решается вопрос о выборе оптимального эффективного параметра рассеяния, для чего используется анализ α-сечений функций принадлежности. Задача установления зависимости между исходными и итоговыми параметрами в форме нечеткого отношения по цепочке отношений, содержащих промежуточные параметры, решается на основе метода нечеткого логического вывода (композиции Мамдани). В работе представлены практические эксперименты по построению нечетких петрофизических моделей.

**Ключевые слова: нечеткое моделирование, петрофизические зависимости, нечеткий логический вывод, неоднородность данных, достоверность**

# MATHEMATICAL MODELING OF FUZZY PETROPHYSICAL DEPENDENCIES

**Kobrunov A.I., Dorogobed A.N., Kozhevnikova P.V.**

*Ukhta State Technical University, Ukhta, e-mail: aira_dark@list.ru*

Petrophysical relations between physical and geological parameters are considered as connections between fuzzy values. These are the basic properties of the results of real experimental petrophysical studies. The form of their representation is fuzzy relations, which are called fuzzy petrophysical model. The petrophysical model serves as the basis for the development of technologies for predicting physical and geological parameters, which are spatially distributed fuzzy variables in the conditions of fuzzy initial data and fuzzy petrophysical models. The result of the prediction-fuzzy physical-geological model is an objective result that reflects the real properties and completeness of the original data and uncertainty in the rules of forecasting. The construction of a fuzzy petrophysical model is based on the creation of relationship membership functions for fuzzy relations based on real data. The methods of their construction are described. To construct the membership functions, an exponential law is used as having the maximum entropy and more freed from the subjective ordering of data. The problem of choosing the optimal effective scattering parameter is solved, for which the analysis of α-sections of the membership functions is used. The problem of establishing the dependence between the initial and final parameters in the form of a fuzzy relationship along the chain of relations containing intermediate parameters is solved on the basis of the fuzzy logical inference method (Mamdani's composition). The paper presents practical experiments on the construction of fuzzy petrophysical models.

**Keywords: fuzzy modeling, petrophysical dependences, fuzzy logic conclusion, data heterogeneity, reliability**

В настоящее время особо актуален комплекс задач математического моделирования изучаемых геологических объектов нефтегазовой геологии. В частности, построение трехмерных геологических моделей месторождения. Основной информацией для построения качественной трехмерной модели являются достоверные и качественные результаты интерпретации ГИС-параметров.

Традиционно для построения петрофизической модели применяются методы статистической обработки информации [1] и выполняется замена экспериментального материала рассчитанными законами и определенной интегральной, единой для всей зависимости, оценкой меры тесноты зависимости. В соответствии с установленным методом, далее полученный закон в форме уравнений зависимости между параметрами переносится на исследуемый объект. При этом важно знать: какова неопределенность конечного прогноза, включающая всю цепочку участвующих в прогнозе преобразований. Данная информация является необходимой для снижения технико-экономических рисков, связанных с формированием проекта разработки месторождения. Необходимо пересчитывать неопределенности в данных

и зависимостях в итоговую неопределенность прогнозных параметров. Статистические методы построения петрофизических моделей не дают такой возможности, поэтому данный путь нередко считается основой ошибочных геологических заключений о ресурсах и запасах углеводородного сырья регионов [2, 3].

Выходом в данной ситуации является построение нечетких петрофизических моделей, которые позволяют отражать нечеткость исходных данных, и использование методов нечеткого прогнозирования.

Метод нечеткого прогнозирования параметров геологической модели является альтернативой методики построения прогноза определяемых по ГИС параметров, основанной на использовании корреляционных связей. Обобщенная технологическая схема нечеткого прогнозирования основана на нечетких петрофизических моделях и теоретических принципах нечеткого логического вывода, выраженного в построении композиций Мамдани и нечётких композиций в целом.

В таблице приводится соответствие между действиями в методах на основе традиционного регрессионного анализа и их условных аналогов в технологии нечеткого прогнозирования.

Цель исследования: демонстрация таких компонент технологии нечеткого прогнозирования, как построение нечетких петрофизических моделей нефтепромысловых параметров в условиях неопределенности и построение композиций.

## Материалы и методы исследования

Исходные геолого-геофизические данные для построения нечетких петрофизических композиций были получены по скважинам Тимано-Печорской нефтегазоносной провинции, к ним относятся одновременно измеренные значения параметров пористости и проницаемости (рис. 1, а), проницаемости и остаточной водонасыщенности (рис. 1, б).

Первым этапом является представление исходных данных $\boldsymbol{s} = \{s_1, s_2, s_3 \ldots s_i;\ i = 1 \ldots N\}$ в форме нечетких отношений – построении нечеткой петрофизической модели, основанное на конструировании функции принадлежности.

Для отношения «Пористость – Проницаемость» исходные данные $\boldsymbol{s} = \{К_п, К_{пр}\}$. Для отношения «Проницаемость – Остаточная водонасыщенность» исходные данные $\boldsymbol{s} = \{К_{пр}, К_{ов}\}$.

Исходные данные покрываются сеткой и рассчитывается: сколько данных попало в каждую ячейку сетки (рис. 2), затем задается уровень погрешности и по невязке определяется необходимое количество источников данных:

$$\max_{\Delta S \in S} \left| \mathfrak{A}^{\varepsilon}(\boldsymbol{s})\Delta S - \mathfrak{A}(\Delta S) \right| \le \varepsilon.$$

Функция принадлежности $\mu_{\mathfrak{A}}(\boldsymbol{s})$ рассчитывается как нормированное к единице поле рассеяния $\mathfrak{A}^{\varepsilon}(\boldsymbol{s})$:

$$\mu_{\mathfrak{A}}(\boldsymbol{s}) = \frac{\mathfrak{A}^{\varepsilon}(\boldsymbol{s})}{\max\limits_{\boldsymbol{s}}[\mathfrak{A}^{\varepsilon}(\boldsymbol{s})]}.$$

Технологическая таблица соответствий

| Традиционная регрессионная схема | Метод нечеткого прогнозирования | Примечание |
|---|---|---|
| Уравнение регрессии $y = f(x)$ | Функция принадлежности $\mu(x, y)$ | Поле достоверности данных используется вместо выборки вдоль линии регрессии |
| Подстановка в уравнение $z = \varphi(y)$ уравнения $y = f(x): z = \varphi(f(x))$ | Композиция $\mu(x,z) = \max\limits_{y} \min[\mu(x,y), \mu(y,z)]$ | Нечеткая петрофизическая модель отражает реальные данные, используется вместо идеализированной зависимости между переменными |
| Прогноз по значениям $x_i$ величин $z_i = \varphi(f(x_i))$ | Прогноз функции принадлежности $\mu(z_i) = \max\limits_{x_i} \min[\mu(x_i), \mu(x_i, z_i)]$ | Вместо прогнозного значения выбранного из $z_i = \varphi(f(x_i))$ вводится нечеткая модель реальных измерений $\mu(x_i)$ и прогнозируется поле достоверности итогового параметра $z_i$ |
| Замена переменных в уравнении петрофизической модели $y = f(x)$ на новую переменную $z = \varphi(y)$ (расчет $z$ по y) | $\mu(x, z) = \mu(y, x) * G[z, \varphi(y)]$ | $G[z, \varphi(y)]$ – надграфик для $z = \varphi(y)$, представляюший собой на плоскости переменных X, Y множество точек $\{z, \varphi(y)\}$. Частный случай композиции $\mu(x,z) = \max\limits_{y} \min[\mu(x,y), \mu(y,z)]$ |

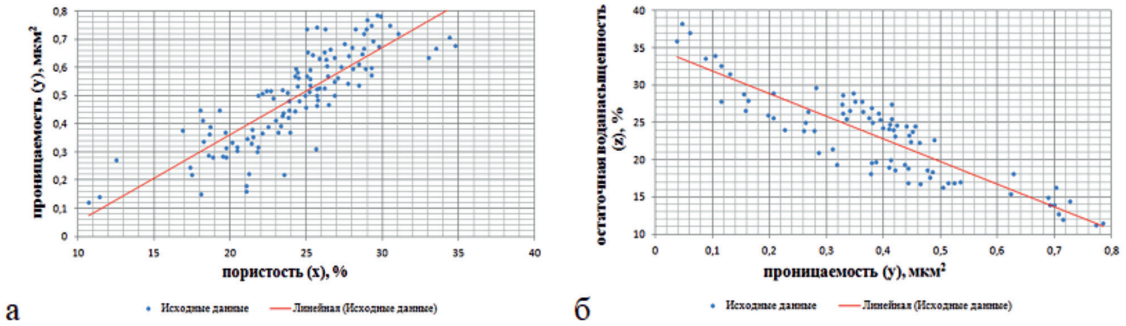


*Рис. 1. Исходные данные: а) Отношение «Пористость – Проницаемость»; б) Отношение «Проницаемость – Остаточная водонасыщенность»*

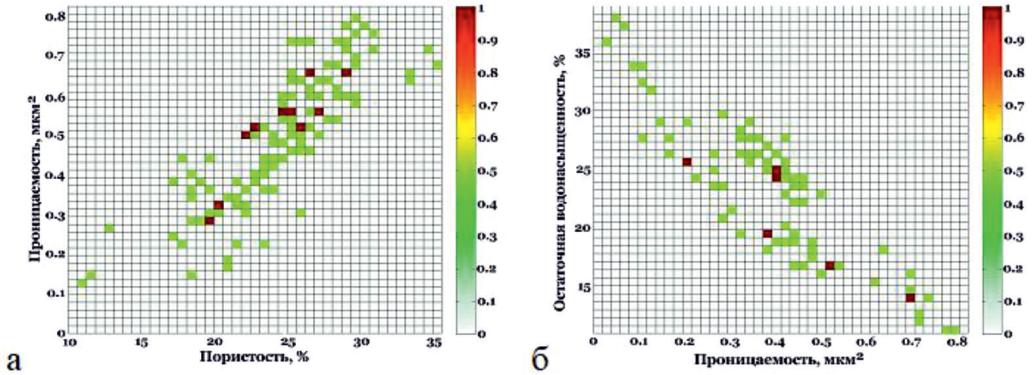


*Рис. 2. Карта плотности данных: а) Отношение «Пористость – Проницаемость»; б) Отношение «Проницаемость – Остаточная водонасыщенность». Цветовая палитра отображает, сколько данных находится в каждой ячейке сетки*

Поле рассеяния имеет смысл диффузионного рассеяния в бесконечном однородном пространстве параметров точечных источников и рассчитывается по формуле

$$\mathfrak{A}^{\varepsilon}(\boldsymbol{s}) = \frac{1}{\zeta\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{K} \varphi(\boldsymbol{h}^k) e^{\left[-\frac{|\boldsymbol{h}^k - \boldsymbol{s}|}{2\zeta^2}\right]},$$

где $\boldsymbol{h}^k$ – координаты расположения источников, $\varphi(\boldsymbol{h}^k)$ – значения источников, $\zeta$ – значение эффективного параметра рассеяния [4]. Эффективный параметр отвечает за размытие функций принадлежности.

Результаты представления исходных данных в форме нечетких отношений для петрофизических зависимостей «пористость – проницаемость» и «проницаемость – остаточная водонасыщенность» представлены на рис. 3.

Ключевым моментом при построении функций принадлежности является подбор значения эффективного параметра. Для этого был разработан анализ α-сечений функций принадлежности. Анализ заключается в построении функций принадлежности при разных значениях эффективного параметра и графиков зависимости относительной меры (площади, занимаемой частью функции принадлежности, которая имеет достоверность выше уровня α) от параметра α. При небольших значениях эффективного параметра данная зависимость имеет характер ломаной линии, при увеличении параметра зависимость начинает плавно убывать. Оптимальным значением эффективного параметра является наименьшее значение, при котором зависимость относительной меры от параметра α плавно убывает.

На рис. 4 приведены графики зависимости относительной меры от параметра α для функций принадлежности «Пористость – Проницаемость», построенных при значениях эффективного параметра, меняющегося от 1 до 2 с шагом 0,25. Оптимальным эффективным параметром в данном случае является значение 1,5.

*Коэффициент нефтенасыщенности месторождения* определялся расчетным путем по формуле $К_н = 1 - К_{ов}$. При этом коэффициент водонасыщенности определялся по зависимости $К_в = f(К_п)$, полученной по данным керна. Построение взаимосвязи $К_в = f(К_п)$ реализуется через промежуточный параметр проницаемости ($К_{пр}$).

Процедура построения нечеткой петрофизической модели для зависимости «Пористость – Проницаемость» называется композицией. Логически непротиворечиво и математически корректно сделать это можно многими способами. Вот некоторые из них: Максминная нечёткая свёртка (композиция) или правило нечеткого логического вывода Мамдани [5], Max-prod композиция, Min-max композиция, Max-

max композиция, Min-min композиция, Min-average композиция. Именно композиция Мамдани, теоретически обоснованная адекватности алгебраическим операциям с матрицами, берется за основу в конструировании методов нечеткого прогнозирования.

При выборе построения композиций нечетких отношений решаются две задачи:

– во-первых, задача исключения зависимых нечетких переменных при конструировании нечеткой петрофизической модели. В нашем случае это означает нахождение нечеткой петрофизической модели $\mu_{\mathfrak{A}\times\mathfrak{M}}$ ($К_п$, $К_в$), связи параметров ($К_п$, $К_в$) по известным нечетким отношениям $\mu_{\mathfrak{A}}$ ($К_п$, $К_{пр}$) и $\mu_{\mathfrak{M}}$ ($К_{пр}$, $К_{ов}$).

При этом для «четкого» случая, композиции нечетких отношений эквивалентны операциям подстановки для обычных функций.

Так, между двумя двухмерными функциями принадлежности $\mu_{\mathfrak{A}}$ ($К_п$, $К_{пр}$) и $\mu_{\mathfrak{M}}$ ($К_{пр}$, $К_{ов}$) может быть построена следующая композиция (Мамдани):

$$\mu_{\mathfrak{A}\times\mathfrak{M}}\left(К_п, К_в\right)=\max_{К_{пр}}\left[\min\left(\mu_{\mathfrak{A}}\left(К_п, К_{пр}\right), \mu_{\mathfrak{M}}(К_{пр}, К_{ов})\right)\right],$$

которая аналогична матричному умножению. Это правило аналогично подстановке в обычное четкое уравнение, между парой четких переменных ($К_п$, $К_{пр}$) уравнения, между другой парой переменных ($К_{пр}$, $К_{ов}$), с целью исключить из результата переменную $К_{пр}$ и получить уравнение связи между ($К_п$, $К_в$).

Композиция нечетких отношений «Пористость – Проницаемость» и «Проницаемость – Остаточная водонасыщенность», в результате которой получаем нечеткое отношение «Пористость – Остаточная водонасыщенность», представлена на рис. 5;

– во-вторых, композиции нечеткого отношения с надграфиками функций. Эта операция называется заменой переменных. В нашем случае переход от параметра водонасыщенности к параметру нефтенасыщенности с помощью линейной обратной зависимости.

Композиция нечеткого отношения «Пористость – Остаточная водонасыщенность» и надграфика функции Кн = 1 – Ков, в результате которой получаем нечеткое отношение «Пористость по керну – Нефтенасыщенность», представлена на рис. 6.

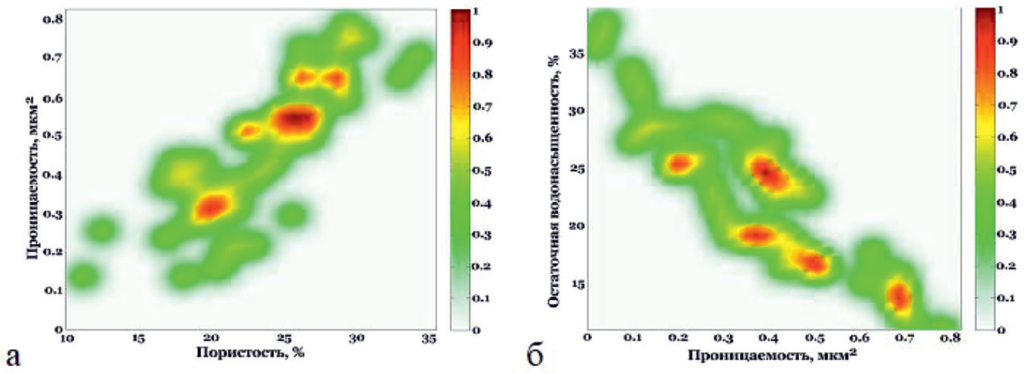


*Рис. 3. Нечеткие отношения: а) «Пористость – Проницаемость»; б) «Проницаемость – Остаточная водонасыщенность». Здесь и далее цветовая палитра отображает уровень достоверности*

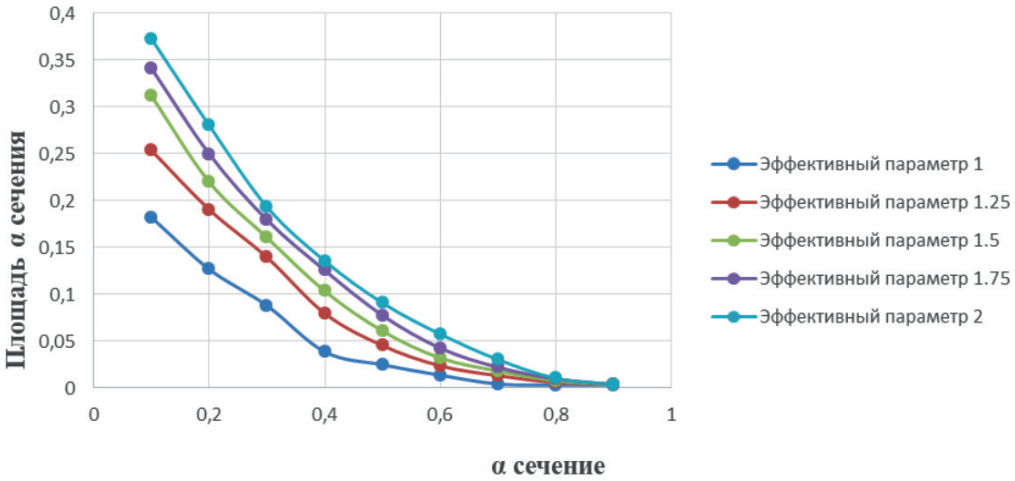


*Рис. 4. Графики зависимости относительной меры от параметра α для функций принадлежности «Пористость – Проницаемость». На легенде указано, при каких значениях эффективного параметра построены функции принадлежности*

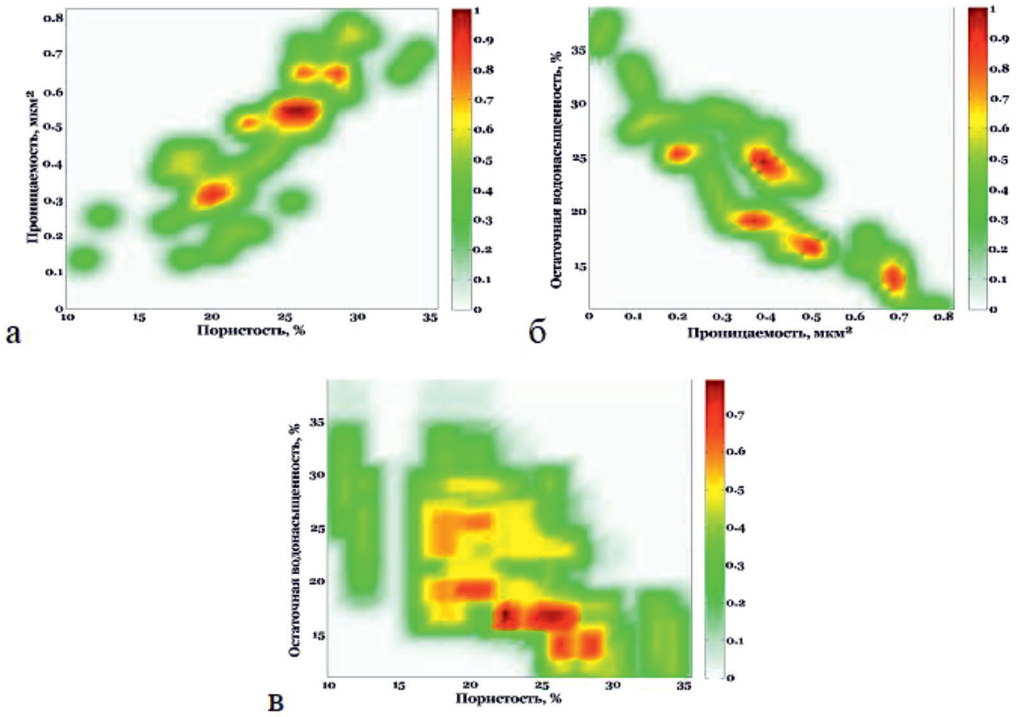


*Рис. 5. Композиция нечетких отношений: а) функция принадлежности «Пористость – Проницаемость»; б) функция принадлежности «Проницаемость – Остаточная водонасыщенность»; в) функция принадлежности «Пористость – Остаточная водонасыщенность»*

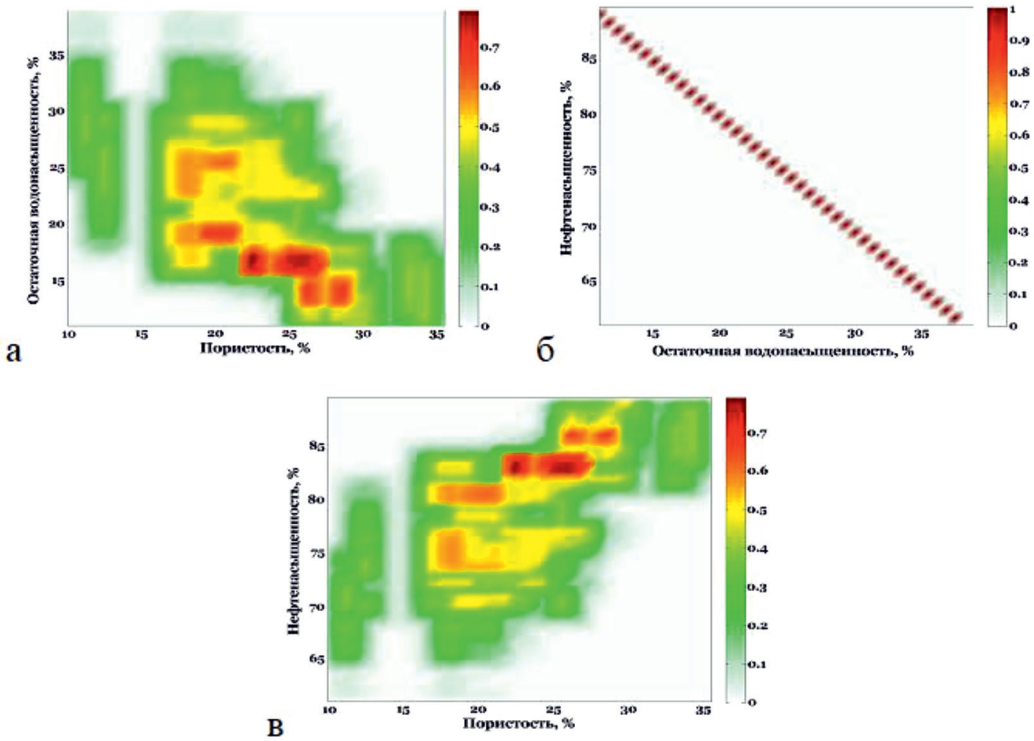


*Рис. 6. Композиция нечетких отношений: а) функция принадлежности «Пористость – Остаточная водонасыщенность»; б) функция принадлежности «Остаточная водонасыщенность – Нефтенасыщенность»; в) функция принадлежности «Пористость – Нефтенасыщенность»*

## Результаты исследования и их обсуждение

Приведенные примеры применения аппарата нечеткого моделирования для данных Тимано-Печорской провинции показали возможность получения дифференцированного по достоверности результата. Далее построенные нечеткие петрофизические модели используются для дальнейшего прогноза и интерпретации данных скважин с целью оценки достоверности подсчета запасов.

Прогноз функции принадлежности, для итогового фильтрационно-емкостного параметра геологической модели выполняется на основе правила нечеткого логического вывода. Правило нечеткого логического вывода реализуется на основе нечеткой петрофизической модели, реализованной в форме композиции Мамдани нечеткого отношения между входным параметром и прогнозным, полученной в результате цепочки композиции отношений и функции принадлежности для исходных данных параметра, полученных на основе интерпретации данных геофизических исследований.

Построенные функции принадлежности для итогового фильтрационно-емкостного параметра, выражающие информационную обеспеченность результатов моделирования, далее используются для экспертизы – оценки достоверности по значениям функции принадлежности построенной геологической модели подсчетных параметров.

## Заключение

За счет построения функции принадлежности на пространстве геологических моделей, отражающей нечеткость исходных данных и особенности нечеткой петрофизической модели, обеспечивается объективная оценка уровня информационной обеспеченности вводимых компонент геолого-геофизической модели, месторождения и возможность оптимизации дальнейших геологоразведочных работ.

## Список литературы

1. Макарова А.А., Михайлов Д.Н., Шако В.В. Моделирование влияния на динамику начальной стадии добычи измененных фильтрационных свойств околоскважинной зоны при первичном вскрытии // Геофизические исследования. 2014. Т. 15. № 1. С. 53–65.

2. Алтунин А.Е., Семухин М.В. Сравнительный анализ использования вероятностных и нечетких методов оценки неопределенности и рисков при подсчете запасов и ресурсов углеводородов // Нефтяное хозяйство. 2011. № 9. С. 44–49.

3. Билибин С.И., Лухминский Б.Е. Анализ погрешностей при оценке запасов нефти и газа // Каротажник. 2010. № 3. С. 37–45.

4. Кобрунов А.И., Кожевникова П.В. Теоретические основы при прогнозировании параметров геологических сред в условиях неопределенности // Фундаментальные исследования. 2015. № 5–3. С. 506–510.

5. Mamdani E.H. Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plants. Proc. Inst. Electrical Engineers. 1974. Vol. 121. № 12. P. 1585–1588.